Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 Análisis
Primavera 2024
Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Martín Berríos y Ricardo Ziegele

Auxiliar 11: Axiomática y Tychonoff

P1. Sea $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos, cada uno no vacío. Para cada $\lambda \in \Lambda$, se define la extensión $X_\lambda := A_\lambda \cup \{\alpha\}$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha \notin A_\lambda$. Sobre cada X_λ se introduce la topología τ_λ, compuesta por el vacío, el singleton $\{\alpha\}$ y por todos los subconjuntos de X_λ que difieren de X_λ en un número finito de elementos. Se define $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ con la topología producto asociada $\otimes\tau_\lambda$. Finalmente, sean $\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ las respectivas proyecciones canónicas donde $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$.

a) Muestre que cada $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ es compacto, y que cada A_λ es cerrado en X_λ.

b) Muestre que $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(A_\lambda)$ y pruebe que la familia $(\pi_\lambda^{-1}(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ posee la *Propiedad de intersección finita (PIF)*. Concluya que el teorema de Tychonoff implica el Axioma de Elección (i.e. $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \phi$)

P2. (Teoría axiomática)

Definiremos un par de axiomas de la teoría axiomática de conjuntos conocida como NBG+AE

Teoría axiomática de conjuntos NBG+AE

- **Ax. de las partes** Si A es conjunto, entonces $\mathcal{P}(A)$ es conjunto.
- **Ax. del infinito**. Existe un conjunto A tal que

  a) $\phi \in A$

  b) Si $x \in A$, entonces $x^+ \in A$

  un conjunto que cumpla tales propiedades se llamará **inductivo**. Aquí $x^+ := x \cup \{x\}$

a) Asumiendo el axioma de las partes y el del infinito, y **sin usar elección**, muestre que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ posee una función de elección.

b) Muestre que el axioma de las partes permite concluir que existen conjuntos no numerables.

c) **(Propuesto)**: Asumiendo NBG+AE (buscarlo si es necesario), pruebe que no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \in x_n$

P3. *a*) Sea $X \neq \phi$ un conjunto finito. Pruebe que:

- X admite un buen orden (sin usar buen ordenamiento)
- Toda relación de orden en X posee un elemento minimal y maximal.
- Toda relación de orden total en X es un buen orden.