

P1)  $X$  cto. infinito.  $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ finito}\}$

P.D.  $\tau$  topología. ¿Es Hausdorff?

Dem:

Probar que  $\tau$  es topología.

1)  $\emptyset \in \tau$  por definición.  $X \in \tau$  pues  $X \setminus X = \emptyset$  es un conjunto finito.

2) Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  familia de cto. t.f.  $A_i \in \tau \quad \forall i \in I$ .

P.D.  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Si no son todos vacíos (en ese caso es trivial).

Tenemos que  $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$ . Cada  $X \setminus A_i$  es finito,

por lo que  $\bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$  también lo es.  $\therefore \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

3) Si  $A, B \in \tau$ , probar que  $A \cap B \in \tau$ .

Suponemos que ambos son no vacíos (si no, es trivial).

Como  $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$  y unión finita de conjuntos finitos es finito, concluimos que  $X \setminus (A \cap B)$  es finito.

$\therefore A \cap B \in \tau$ .

Esto prueba que  $\tau$  es topología.

Esta topología no puede ser Hausdorff. Si  $U, V \subseteq X$  son abts.

$U \neq \emptyset$  t.f.  $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \subseteq X \setminus V$  y  $|U| \leq |X \setminus V| < \infty$ , i.e.  $U$

es finito. Pero  $X \setminus U$  también es finito. Luego,  $X = U \cup (X \setminus U)$  es un conjunto finito  $\rightarrow \leftarrow$ .

P2] Sean  $X, Y$  e.t.s,  $\{A_i\}_{i \in I} \text{ t.f. } X = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Sean

$f_i: A_i \rightarrow Y$  t.f.  $f|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j} \forall i, j \in I$ . S:

(a) las  $A_i$  son abiertos, o

(b) las  $A_i$  son cerrados y  $|I| < \infty$ ,

entonces  $\exists! f: X \rightarrow Y$  continua t.f.  $f|_{A_i} = f_i \forall i \in I$ .

Dem:

$f$  existe por motivos puramente conjuntistas. Definimos  $f(x) = f_i(x)$  s:  $x \in A_i$  y esto está bien definido  $\&$  pues

s:  $x \in A_j$  (otro  $j$ ), entonces  $f_j(x) = f_i(x)$  ( $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$ )

Así, sólo hay que ver que  $f$  es continua en ambos casos.

(a)  $A_i$  abiertos.

Sea  $V \subseteq Y$  abierto. Luego,  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$  y cada

$f_i^{-1}(V)$  es abierto en  $A_i$ , pues  $f_i: A_i \rightarrow Y$  es continua.

Como  $A_i$  es abierto en  $X$ , concluimos que  $f_i^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ . Así,  $f^{-1}(V)$  es unión de abtos  $\therefore$  es abto.

Así,  $f: X \rightarrow Y$  es continua.

(b)  $A_i$  cerrados,  $|I| < \infty$ .

Muy parecido. S:  $C \subseteq Y$  cerrado, entonces  $f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C)$

tenemos que  $f_i^{-1}(C)$  es cerrado en  $A_i$ . Como las  $A_i$  son cerrados, y cada  $f_i^{-1}(C)$  es cerrado en  $A_i$ ,  $f^{-1}(C)$  es cerrado por ser unión finita de cerrados. //

P3  $U \subseteq \mathbb{Z}$  abto.  $\Leftrightarrow \forall a \in U, \exists m \geq 1$  t.f.  $a + m\mathbb{Z} \subseteq U$ .

(a) Esto es topología. (T)

Dem:

1)  $\emptyset \in \tau$  por vacuidad,  $X \in \tau$  pues  $\forall a \in X, a + \mathbb{Z} = X$ .

2) Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  están en  $\tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

(ojo! Por como definimos la topología, esto es trivial). Esto es porque estamos describiendo una base y lo único delicado es la intersección.

3) Sean  $U, V \subseteq \mathbb{Z}, U, V \in \tau$ . P.D.  $U \cap V \in \tau$ .

Sea  $a \in U \cap V$ . luego,  $a \in U$  y  $a \in V$ , por lo que  $\exists m, m' \geq 1$

t.f.  $a + m\mathbb{Z} \subseteq U$  y  $a + m'\mathbb{Z} \subseteq V$ . Sea  $b = m \cdot m' \geq 1$ .

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, a + kb = \underbrace{a + m(km')}_{\in a + m\mathbb{Z}} = \underbrace{a + m'(km)}_{\in a + m'\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow a + b\mathbb{Z} \subseteq (a + m\mathbb{Z}) \cap (a + m'\mathbb{Z}) \subseteq U \cap V.$$

$\therefore U \cap V \in \tau$ . //

(b) Todo  $a + m\mathbb{Z}$  es cerrado y abto.

Dem: Es abierto por definición. Es cerrado pues

$$(a + m\mathbb{Z})^c = \bigcup_{b=1}^{m-1} a + b\mathbb{Z} \quad (\text{ojo: si } m=1, (a + \mathbb{Z})^c = (\mathbb{Z})^c = \emptyset)$$

Es unión de abiertos y  $\therefore$  abierto. //

(c) P.D.  $\bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$ .

Dem:  $\subseteq$  Todo  $p$  primo es  $|p| \geq 2$ . luego  $p\mathbb{Z}$  no contiene  $\pm 1$ .

$\supseteq$  Todo entero  $\neq \pm 1$  es múltiplo de algún primo. //

(d) P.D.  $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$  no es cerrado  $\therefore \exists$ oo's números primos.

Dem:  
 $(\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\})^c = \{\pm 1\}$  no es abierto pues es un conjunto finito  
 (y por ende no puede contener un conjunto de la forma  $a + m\mathbb{Z}$ ). Si los primos fueran finitos, tendríamos que

$$\underbrace{\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}}_{\text{no cerrado}} = \underbrace{\bigcup_{p \text{ primo}} p\mathbb{Z}}_{\text{Unión finita de cerrados}}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$  sería cerrado por ser unión finita de cerrados. //

P4  $(X, \tau)$  ext. y  $f: X \rightarrow Y$  sobreyectiva. Definimos la topología  $\tau'$  en  $Y$  declarando:

$$U \subseteq Y \text{ abto.} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ abto. en } \tau.$$

(a)  $\tau'$  es topología y es la más fina en  $Y$  tq.  $f: X \rightarrow Y$  es continua.

Demo:

$$\cdot) f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ y } f^{-1}(Y) = X, \text{ por lo que } \emptyset, Y \in \tau'.$$

$\cdot) S: \{A_i : i \in I\}$  son abtos en  $\tau'$ , entonces

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(A_i)}_{\in \tau} \in \tau$$

$$\therefore \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau'.$$

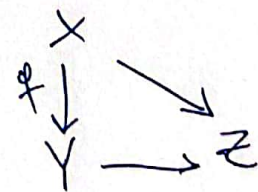
$$\cdot) S: U, V \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(U \cap V) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\in \tau} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in \tau} \in \tau,$$

$$\therefore U \cap V \in \tau'.$$

$S: \tau''$  es otra topología en  $Y$  tq.  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau'')$  es continua, entonces  $f^{-1}(U) \in \tau \forall U \in \tau''$ . Pero esto significa que todo  $U \in \tau''$  está en  $\tau'$  (de función top.  $\tau'$ ). Así,  $\tau'' \subseteq \tau'$  y  $\tau'$  es más fina que  $\tau''$ .

(b) Sea  $Z$  ext. P.D.  $f: Y \rightarrow Z$  continua  $\Leftrightarrow f \circ g: X \rightarrow Z$  continua.

Demo:  $(\Rightarrow)$  Como  $f$  es continua y composición de continuas es continua, condinor que  $f \circ g$  es continua.



$(\Leftarrow)$  Sea  $U \subseteq Z$  abierto. Luego,  $(f \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$  es abierto en  $X$  y  $\therefore f^{-1}(U)$  es abto. en  $Y$ . Esto prueba que  $f$  es continua.

(c)  $f: X \rightarrow Z$  continua ty.  $g(x) = g(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$ ,  
 entonces  $\exists! \tilde{f}: Y \rightarrow Z$  continua ty.  $f = \tilde{f} \circ g$ .

Dem:  
 Definimos  $\tilde{f}(y) = f(x)$  con  $x \in g^{-1}(y) \neq \emptyset$  (Sobreyectiva). Esto  
 está bien definido pues si:  $x' \in g^{-1}(y)$ , entonces  $g(x) = g(x') = y$   
 y entonces  $f(x) = f(x')$ . Por definición,  $\tilde{f} \circ g = f$ .  $\tilde{f}$  es  
 continua pues  $\tilde{f} \circ g = f$  lo es y por la parte anterior.

[S] Propuesto! Es casi igual a la P4: