Pauta aux 5

miércoles, septiembre 25, 2024 8:13 PM

$\boxed{P1}$ A conexo, $f: A \to X$ continua y sobreyectiva. PDQ: X es conexo

Dem:

Razonemos por contradicción: Digamos que $f(A)$ no es conexo

$\Rightarrow \exists U, V$ abiertos disjuntos no vacíos y distintos a $f(A)$ en $f(A)$ tales que

$f(A) = U \cup V \quad / \, f^{-1}(\;)$

$\rightarrow A = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$

Luego, como f es continua ssi preimagen de abierto es abierto

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en A. Más aún, son disjuntos pues: $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\phi) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

$\Rightarrow \cancel{f^{-1}(U \cap V)} = \phi = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

Luego, $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ abiertos disjuntos en A tq $A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ lo que contradice el hecho de que A es conexo.

$\therefore f(A)$ debe ser conexo.

Para probar que X es conexo, basta notar que, dado f sobreyectiva $\Rightarrow f(A) = X$. Luego, X es conexo.

b) PDQ: Conexo por caminos $\Rightarrow$ conexo.

Dem:

Asumamos que X no es conexo:

$\Rightarrow \exists A, B$ abiertos en X tales que $A, B \neq X \wedge A, B \neq \phi$ y $A \cup B = X$. Tomemos un elemento $a \in A$ y $b \in B$. Como X es conexo por caminos, $\exists \gamma: [0,1] \to X$ función continua tq $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$ (es decir, existe continua tq $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$ (es decir, existe camino que los conecta).

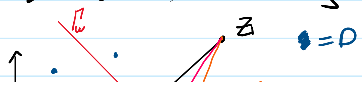
Luego, como $[0,1]$ es un intervalo no degenerado
$\Rightarrow [0,1]$ es conexo.

$\therefore \gamma([0,1])$ es conexo por la p(.a)
Luego, $\gamma([0,1]) \subseteq A$ ∨ $\gamma([0,1]) \subseteq B$ (Al ser conexo, debe estar o en A o en B)
Sin embargo, $\gamma^{-1}(\{a\}) = \{0\} \subseteq [0,1]$
$\Rightarrow \{a\} \in \gamma([0,1])$ y $\{a\} \subseteq A \Rightarrow \gamma([0,1]) \subseteq A$
y también, $\gamma^{-1}(\{b\}) = \{1\} \subseteq [0,1]$
$\Rightarrow \{b\} \in \gamma([0,1])$ pero $b \notin A$. Contradicción.

$\therefore X$ debe ser conexo. ∎

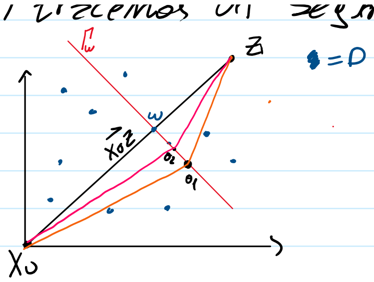
c) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ numerable. PDQ: $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es conexo.
<u>Dem</u>: En particular, demostraremos que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es conexo por caminos.
Para ello, usaremos que:
<u>Lema</u>: X es conexo por camino ssi dado $x_0 \in X$, $\exists$ camino de x_0 a z para cualquier $z \in X$. (Propuesto :))

Así, sea $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ y sea $z \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Trazamos la línea recta $\overline{x_0 z}$. Ésta atraviesa, a lo más, una cantidad numerable de puntos en D.
$\rightarrow \overrightarrow{x_0 z} = \overrightarrow{x_0 z} \setminus D \cup \overrightarrow{x_0 z} \cap D$
Si $\overrightarrow{x_0 z} \cap D = \phi$, encontramos un camino entre x_0 y z.
Ahora, veamos el caso $\overrightarrow{x_0 z} \cap D \neq \phi$. Tomemos un $w \in \overrightarrow{x_0 z} \cap D$
y tracemos un segmento recto Γ_w tq $\{w\} \in \Gamma_w$ y $\Gamma_w \perp \overrightarrow{x_0 z}$



Ahora, $\forall \theta \in \Gamma_w \setminus \{w\}$, trazemos $\overrightarrow{x_0 \theta} \cup \overrightarrow{\theta z}$

Trazemos un segmento recto Γ_w tq $w \in \Gamma_w$ y $\Gamma_w \perp X_0 Z$



Ahora, $\forall \theta \in \Gamma_w \setminus \{w\}$, trazemos $\overrightarrow{X_0 \theta} \cup \overrightarrow{\theta Z}$

Notemos que, al ser $\overrightarrow{X_0 \theta}$ el segmento más corto entre X_0 y θ, este es único (lo mismo para $\overrightarrow{\theta Z}$)

$\Longrightarrow \forall \theta_1, \theta_2 \in \Gamma_w \setminus \{w\}$ tq $\theta_1 \neq \theta_2$

$\Longrightarrow \overrightarrow{X_0 \theta_1} \cap \overrightarrow{X_0 \theta_2} = \{X_0\} \wedge \overrightarrow{\theta_1 Z} \cap \overrightarrow{\theta_2 Z} = \{Z\}$

Entonces, si $\overrightarrow{X_0 \theta_1} \cap D \neq \phi \vee \overrightarrow{\theta_1 Z} \neq \phi$ y $\overrightarrow{X_0 \theta_2} \cap D \neq \phi \vee \overrightarrow{\theta_2 Z} \cap D \neq \phi$

$\Longrightarrow$ ambas rectas intersectan distintos puntos de D. Así, dado que D es numerable y que cada $\theta \in \Gamma_w$ nos daría un punto de intersección con D distinto cada vez, obtenemos que NECESARIAmente

$\exists \tilde{\theta} \in \Gamma_w$ tal que $(\overrightarrow{X_0 \tilde{\theta}} \cup \overrightarrow{\tilde{\theta} Z}) \cap D = \phi$ pues, de no ser así tendríamos que $\forall \theta \in \Gamma_w \; \exists d \in \overrightarrow{X_0 \theta} \cup \overrightarrow{\theta Z}$, pero esto implica que $|\Gamma_w| \leq |D|$

Sin embargo, $|\Gamma_w| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$ y $|D| = |\mathbb{N}|$ (por ser numerable)

y eso sería una contradicción, pues $|\Gamma_w| \leq |D| \Longleftrightarrow |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$ lo cual es absurdo.

Así encontramos que podemos unir a X_0 con Z arbitrario mediante esta construcción $\Longrightarrow$ Lo podemos hacer $\forall Z \in \mathbb{R}^2 \setminus D$

El camino explícito sería $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)X_0 + 2t\tilde{\theta}, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-t)\tilde{\theta} + 2(t - \frac{1}{2})Z, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donde $\tilde{\theta}$ es aquel que $\overrightarrow{X_0 \tilde{\theta}} \cup \overrightarrow{\tilde{\theta} Z} \cap D = \phi$

$\therefore \mathbb{R}^2 \setminus D$ es conexo por caminos y por ende conexo.

P2)

a) PDQ: $\mathcal{P}(X)$ es la topología más fina de X

Dem:

Sea τ cualquier topología admisible en X y sea $U \in \tau$.

Sea τ cualquier topología admisible en X y sea $U \in \tau$.

$\rightarrow$ Por definición de topología, $U \subseteq X$

$\Rightarrow U$ es un subconjunto de $X \Rightarrow U \in \mathcal{P}(X)$

$\therefore \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ es más fina. Como τ era arbitraria $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ es la topología más fina.

b) X conjunto cualquiera, (Y, τ_Y) un espacio topológico y $f: X \rightarrow (Y, \tau_Y)$ una función.

1) PDQ: $\tau_X = \{ f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y \}$ es una topología sobre X.

Dem:

Tenemos que probar que:
i) $\phi \in \tau_X$, $X \in \tau_X$
ii) $\theta_1, \theta_2 \in \tau_X \Rightarrow \theta_1 \cap \theta_2 \in \tau_X$
iii) $\forall S \subseteq \tau_X$, $\bigcup_{\theta \in S} \theta \in \tau_X$

Veamos i):

$\rightarrow$ Sabemos que $\phi \in \tau_Y$ pues es una topología. Luego, por vacuidad:

$f^{-1}(\phi) = \phi \wedge f^{-1}(\phi) \in \tau_X \Rightarrow \phi \in \tau_X$

Asimismo, $Y \in \tau_Y$ y $f^{-1}(Y) = X$. Luego:

$f^{-1}(Y) = X \wedge f^{-1}(Y) \in \tau_X \Rightarrow X \in \tau_X$ ✓

Veamos ii):

Sean $\theta_1, \theta_2 \in \tau_X$, por definición de τ_X

$\theta_1 = f^{-1}(U)$ con $U \in \tau_Y$ y $\theta_2 = f^{-1}(V)$, $V \in \tau_Y$

$\Rightarrow \theta_1 \cap \theta_2 = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$

Pero, como τ_Y es topología, $U \cap V \in \tau_Y$

$\Rightarrow f^{-1}(U \cap V) = \theta_1 \cap \theta_2 \in \tau_X$. ☒

Por último, veamos iii):

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ familia arbitraria en τ_X.

$\Rightarrow \forall i \in I$, $U_i = f^{-1}(V_i)$ para algún $V_i \in \tau_Y$

Luego, $\bigcup U_i = \bigcup f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup V_i)$ y como $\forall i \in I$, $V_i \in \tau_Y$

$\Longrightarrow \forall i \in I,\ U_i = f^{-1}(V_i)$ para algún $V_i \in \tau_Y$

Luego, $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i)$ y, como $\forall i \in I\ V_i \in \tau_Y$

y τ_Y es topología $\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} V_i \in \tau_Y$

y como $\bigcup_{i\in I} U_i = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_X$

$\therefore$ Concluimos que τ_X es una topología en X.

2) PDQ: $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua.

Recordemos que f es continua ssi $\forall V \in \tau_Y,\ f^{-1}(V) \in \tau_X$

es decir, si preimagen de abierto es abierta.

Sea $V \in \tau_Y$, $f^{-1}(V) \in \tau_X$ por construcción de τ_X.

$\therefore$ f es continua.

3) <u>Propuesto</u>

c) PDQ: (X,τ_X) esp. topológico tq $\forall (Y,\tau_Y)$ esp. topológico y $\forall f: X \longrightarrow Y$, f es continua $\Longrightarrow \tau_X = \mathcal{P}(X)$

<u>Dem:</u>

Razonemos por contradicción: Digamos que $\tau_X \neq \mathcal{P}(X)$. Luego, $\exists A \subseteq X$ tal que $A \notin \tau_X$. Como $\forall (Y,\tau_Y)$, $f: X \to Y$ es continua por hipótesis,

Sea $Y = \{0,1\}$ y $\tau_Y = \mathcal{P}(Y) = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\emptyset\}$

y definimos $f: X \longrightarrow Y$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Logicamente, $\{1\} \in \tau_Y$ y $\{0\} \in \tau_Y$. Mas aún:

$$f^{-1}(\{1\}) = A \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$$

Y como f es continua y $\{1\} \in \tau_Y, \{0\} \in \tau_Y \Longrightarrow A \in \tau_X \wedge X\setminus A \in \tau_X$

Sin embargo, partimos diciendo que $A \notin \tau_X$

$\Longrightarrow$ f no es continua, lo que es una contradicción

Sin embargo, partimos diciendo que $A \notin \tau_X$

$\Longrightarrow$ f no es continua, lo que es una contradicción.

$\therefore \tau_X = \mathcal{P}(X)$. $\blacksquare$

P3 X conjunto, $\nu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Diremos que ν satisface los axiomas de Kuratowski si:

1. $\nu(X) = X$
2. $\nu(A) \subseteq A \quad \forall A \subseteq X$
3. $\nu(\nu(A)) = \nu(A) \quad \forall A \subseteq X$
4. $\nu(A \cap B) = \nu(A) \cap \nu(B) \quad \forall A, B \subseteq X$

a) PDQ: $\tau = \{\nu(A) : A \subseteq X\}$ es una topología en X (ν satisface los axiomas)

<u>Dem:</u>

(1) Por Axioma 1, $\nu(X) = X$ por ende $X \in \tau$.
Por otro lado, por axioma 2 $\nu(\phi) \subseteq \phi \Longrightarrow \nu(\phi) = \phi$ y por ende $\phi \in \tau$.

Ahora, si $A, B \in \tau \Longrightarrow A = \nu(U_A)$ y $B = \nu(U_B)$ (por definición de τ)

Luego, $A \cap B = \nu(U_A) \cap \nu(U_B)$ y esto, por axioma 4

$\rightarrow A \cap B = \nu(U_A) \cap \nu(U_B) = \nu(U_A \cap U_B)$

$\Longrightarrow A \cap B \in \tau$

Por último nos falta probar que dada $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.
Notemos en primer lugar que si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$, entonces existe otra familia $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $A_\lambda = \nu(B_\lambda)$ $\forall \lambda \in \Lambda$.
Así, por axioma 2 se tiene que

$$\nu\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

Probaremos la inclusión hacia el otro lado, y para eso demostraremos el lema siguiente:

<u>Lema:</u> Si $A, B \subseteq X$ son tales que $A \subseteq B \Longrightarrow \nu(A) \subseteq \nu(B)$

<u>Dem:</u> Por Axioma$^{(*)}$ 4, $\nu(A) = \nu(A \cap B) \overset{(*)}{=} \nu(A) \cap \nu(B) \subseteq \nu(B)$

$\therefore \nu(A) \subseteq \nu(B)$ ▣

Ahora, sea $\bar{\lambda} \in \Lambda$ arbitrario. Es claro que $A_{\bar{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

Luego, por el lema anterior se tiene que:

$$\nu(A_{\bar{\lambda}}) \subseteq \nu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \quad (\star)$$

Pero $\nu(A_{\bar{\lambda}}) = \nu(\nu(B_{\bar{\lambda}}))$ (pues $A_{\bar{\lambda}} = \nu(B_{\bar{\lambda}})$)

y por axioma 3, $\nu(\nu(B_{\bar{\lambda}})) = \nu(B_{\bar{\lambda}}) = A_{\bar{\lambda}}$

$\Longrightarrow$ Por $(\star)$ que $A_{\bar{\lambda}} \subseteq \nu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$

Y como se tiene para $\bar{\lambda}$ arbitrario, entonces

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq \nu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$$

Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \nu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ y $\therefore \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$

Luego τ es cerrado para uniones arbitrarias y por todo lo anterior, τ es topología. ▣

b) PDQ: $\forall A \subseteq X, \nu(A) = \mathrm{int}(A)$

Dem: Sea $A \in \tau$:

Lo haremos por doble inclusión:

$\subseteq$) Por Axioma 2, $\nu(A) \subseteq A$ y como $\nu(A) \in \tau$ (Pues $A \subseteq X$)

$\Longrightarrow \nu(A) \subseteq A \subseteq \bigcup_{\theta \subseteq A, \theta \in \tau} \theta = \mathrm{int}(A)$ ✓

$\supseteq$) Por otro lado, notemos que

$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{\theta \subseteq A, \theta \in \tau} \theta \subseteq A$ por def. (unión de subconjuntos de A es subconjunto de A)

y $\mathrm{int}(A) \in \tau$ pues es unión de abiertos $\Longrightarrow \mathrm{int}(A) = \nu(B)$

Para algún $B \subseteq X$ (por def. de τ).

Así, por el axioma (*) 3, tenemos que:

$\nu(\mathrm{int}(A)) = \nu(\nu(B)) \overset{(*)}{=} \nu(B) = \mathrm{int}(A)$

Luego, por esto último y el Lema que probamos antes, se tiene que

$\mathrm{int}(A) = \nu(\mathrm{int}(A)) \subseteq \nu(A)$ $\longrightarrow$ Pues $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ por def

$\therefore$ el lema dice que $\nu(\mathrm{int}(A)) \subseteq \nu(A)$)

$\therefore \operatorname{int}(A) \subseteq \nu(A) \wedge \nu(A) \subseteq \operatorname{int}(A) \iff \nu(A) = \operatorname{int}(A)$ ☒