Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 Análisis
Primavera 2024
Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Martín Berríos y Ricardo Ziegele

Auxiliar 5: Conexidad y Espacios Topológicos

P1. (**Algunas propiedades de conexidad**)

a) Sea A un espacio topológico conexo, X un espacio topológico y sea $f : A \longrightarrow X$ una función continua sobreyectiva. Pruebe que $f(A)$ es conexo y concluya que X es conexo.

b) Sea X un espacio topológico conexo por caminos, demuestre que X es conexo. *(Notar que aquí demostramos que conexidad por caminos implica conexidad)*

c) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto numerable. Pruebe que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es conexo.

P2. (Topología, por fin!)

a) Sea X un conjunto y $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ la topología discreta. Pruebe que τ_d es la topología más fina de X.

b) Sea X un conjunto, (Y, τ_Y) un espacio topológico y $f : X \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función.

1) Pruebe que $\tau_X = \left\{f^{-1}(U) | U \in \tau_Y\right\}$ es una topología sobre X. *Nota: Esta topología se llama la topología inducida por f*
2) Demuestre que $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua.
3) **Propuesto:** Concluya que τ_X es la topología mas gruesa tal que f es continua.

c) Demuestre que si X es un espacio topológico tal que para cualquier espacio topológico Y y toda función $f : X \longrightarrow Y$, f es continua, entonces X debe estar dotado de la topología discreta.

P3. (Axiomas de Kuratowski) Sea X un conjunto y $\nu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función sobre la clase de subconjuntos de X (es decir, sobre las partes de X). Diremos que una tal función ν satisface los axiomas de Kuratowski si satisface los siguientes axiomas:

1) $\nu(X) = X$
2) $\nu(A) \subseteq A$ para todo $A \subseteq X$
3) $\nu(\nu(A)) = \nu(A)$ para todo $A \subseteq X$
4) $\nu(A \cap B) = \nu(A) \cap \nu(B)$

a) Pruebe que $\tau = \{\nu(A) | A \subseteq X\}$ es una topología en X

b) Para $A \subseteq X$ definimos su *interior* como el conjunto

$$\text{int}(A) = \bigcup_{U \subseteq A, U \in \tau} U$$

es decir, es el conjunto abierto más grande contenido en A. Pruebe que para todo $A \subseteq X$, $\nu(A) = \text{int}(A)$.