Pauta auxiliar 3

sábado, 31 de agosto de 2024 17:16

P1. (Aplicación de punto fijo de Banach)

Sea $C([a,b],\mathbb{R})$ el espacio de las funciones reales continuas con dominio en el intervalo $[a,b]$, y sea la métrica d_∞ la métrica inducida por la norma del supremo esencial, i.e

$$d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

a) Pruebe que el espacio métrico $((C([a,b],\mathbb{R}),d_\infty)$ es completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Notemos que, para cualquier $x_0\in[a,b]$, la sucesión real $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pues:

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)| \leq ||f_n-f_m||_\infty \leq \varepsilon \quad (\text{pues } \{f_n\} \text{ es de Cauchy en } (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),d_\infty))$$

Y como $\mathbb{R}$ es completo, entonces existe un $f(x_0)\in\mathbb{R}$ tq $f_n(x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$.

Además, podemos probar que $f(x_0)$ es acotado:

En efecto:

Tomando $\varepsilon=\frac{1}{2}$ $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n,m\geq N$ $||f_n-f_m||_\infty<\frac{1}{2}$. $(*)$ Luego, para cualquier $x_0\in\mathbb{R}$

$$|f(x_0)| \leq |f(x_0)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)| \leq ||f-f_N||_\infty + ||f_N||_\infty$$

donde $||f-f_N||_\infty \leq \frac{1}{2}$ pues, $\forall n\geq N$, $|f_n(x_0)-f_N(x_0)|\leq\frac{1}{2}$ para todo $x_0\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x_0)-f_N(x_0)| = |\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)-f_N(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0)-f_N(x_0)| \leq \frac{1}{2}$$

(Por $*$)
$(m=N,\ n\geq N)$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_N(x)| = ||f-f_N||_\infty \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

Ahora sólo nos falta mostrar que $||f_n-f||_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Sea $\varepsilon>0$ y $N\in\mathbb{N}$ tq para $n,m\geq N$, tengamos $||f_n-f_m||_\infty<\varepsilon$. Luego, $\forall n\geq N$ tenemos:

$$|f(x)-f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x\in[a,b]$$

$$\Rightarrow ||f-f_n||_\infty \leq \varepsilon$$

Concluyendo así que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y por ende, $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),d_\infty)$ es un E.M. completo. ∎

b) Dada la siguiente ecuación integral

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

donde $g(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$, $k(x,y) \in C([a,b]^2,\mathbb{R})$, encuentre las condiciones sobre λ para que exista solución a esta ecuación. (***Hint:*** *Note que la ecuación es de la forma $T(f) = f$, y use Punto fijo de Banach)*

Siguiendo el hint, reescribimos la ecuación de forma

$$T(f) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

Y, como $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $k(\cdot,y) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, se tiene que la aplicación

$$T : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

Ahora, determinemos bajo que condición sobre λ, T es una contracción:

•) Como k es continua sobre un intervalo cerrado, es acotada. De hecho

$$|k(x,y)| \leq C \quad \forall x,y \in [a,b]^2 \Rightarrow \|k\|_\infty \leq C$$

Luego:

$$d_\infty(T(f_1),T(f_2)) = \sup_{x\in[a,b]} |T(f_1)(x) - T(f_2)(x)|$$

$$= \sup_x \left| \cancel{g(x)} + \lambda\int_a^b k(x,y) f_1(y) dy - \cancel{g(x)} - \lambda\int_a^b k(x,y) f_2(y) dy \right|$$

$$= \sup_x |\lambda| \left| \int_a^b k(x,y)(f_1(y) - f_2(y)) dy \right|$$

$$\leq C|\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \int_a^b dy$$

$$= C|\lambda|(b-a) d_\infty(f_1,f_2)$$

Sabemos que para ser contracción se debe tener

$$0 < C|\lambda|(b-a) < 1 \iff |\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}$$

Luego, si $|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}$, por el teorema de punto fijo de Banach, la ecuación integral tiene una única solución tal que $T(f) = f$. ∎

P2. (Propiedades de espacios completos)

a) Suponga (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos, donde (X, d_1) es completo. Sea E un conjunto cerrado en X y sea $f : E \to Y$ una función continua. Pruebe que, si se tiene

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \geq d_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Entonces $f(E)$ es cerrado.

Sea $\{y_n\} \subseteq f(E)$ una sucesión convergente $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in Y$.

Como f es continua y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(E) \Rightarrow f^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq E$

Llamemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := f^{-1}((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq E$. Por construcción,

$f(x_n) = y_n \in f(E)$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es de Cauchy en Y

$\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, m \geq N$ $d_2(y_n, y_m) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

Y, por propiedad del enunciado

$d_1(x_n, x_m) < d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y, como X es completo, esto implica que $x_n \to x$ para algún $x \in X$.

Más aún, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ cerrado $\Rightarrow x \in E$.

Así,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{(pues } f \text{ es continua)}$$

$\Rightarrow y = f(x)$ y, como $x \in E \Rightarrow f(x) \in f(E)$

$\Rightarrow y \in f(E)$

$\Rightarrow f(E)$ es cerrado (el límite de sucesiones convergentes de $f(E)$ está en $f(E)$). $\blacksquare$

b) Sea $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ una isometría sobreyectiva. Pruebe que si (X, d_1) es completo, entonces (Y, d_2) lo es también.

Una isometría es una función f tal que

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) = d_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Notemos que, por definición, f es continua e inyectiva. (Propuesto :))

Como tenemos que f es sobreyectiva por enunciado

$\Rightarrow f$ es biyectiva

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (Y, d_2).

Definimos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{f^{-1}(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Notemos que, dado $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, m \geq N$

$$d_2(y_n, y_m) = d_2(f(x_n), f(x_m)) \underset{\substack{\text{pues } f \\ \text{es isometría}}}{=} d_1(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (\text{pues } y_n \text{ es de Cauchy})$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d_1)

Por la completitud de (X, d_1), (x_n) es convergente y converge a un cierto $x \in X$ (i.e $x_n \to x$). Sea $y = f(x)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0$

$$d_2(y_n, y) \underset{\substack{\text{def} \\ \text{de } x_n}}{=} d_2(f(x_n), f(x)) \underset{\text{isometría}}{=} d_1(x_n, x) \underset{x_n \to x}{\leq} \varepsilon$$

$\Rightarrow d(y_n, y) \leq \varepsilon \Rightarrow y_n \to y$

Concluyendo así que Cauchy $\Leftrightarrow$ convergente en Y, i.e. (Y, d_2) es completo.

c) Dados (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos completos, pruebe que $Z = X \times Y$ es completo con la métrica del producto

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left((d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (\{x_n\}, \{y_n\})$ sucesión de Cauchy en Z.

De la definición de ρ, tenemos:

$$d_1(x_1, x_2) \leq \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \ \wedge \ d_2(y_1, y_2) \leq \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

Usando esto para $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N$

$$d_1(x_n, x_m) \leq \rho(z_n, z_m) \leq \varepsilon \quad \wedge \quad d_2(y_n, y_m) \leq \rho(z_n, z_m) \leq \varepsilon$$

Pues z_n es de Cauchy. Luego, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy en X e Y respectivamente. Como X e Y son completos $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes ($x_n \to x$, $y_n \to y$).

Así, $\quad \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1$, $d_1(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

y $\quad \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$, $d_2(y_n, y) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

Definiendo $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $z = (x, y)$, tenemos:

$$\rho(z_n, z) = (d_1(x_n, x)^2 + d_2(y_n, y)^2)^{1/2} \leq \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \rho(z_n, z) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow z_n \to z$ Concluyendo así que $Z = X \times Y$ es completo ☺

$\Rightarrow) \; l(t_n, t) = c$

$\Rightarrow$ $z_n \to z$ Concluyendo así que $Z = X \times Y$ es completo ∎

P3. (Teorema de Picard-Lindelöf via punto fijo) Sea el problema de valor inicial

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x), \quad x(0) = x_0$$

donde $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función dada y $x(t)$ es la función desconocida de la EDO. Usaremos el teorema de punto fijo de Banach para demostrar el teorema de Picard-Lindelöf, que nos asegura existencia y unicidad de la solución de la ecuación anterior. Recordemos el enunciado del teorema:

a) Re-escriba la EDO en forma de una ecuación integral y enuncie el problema integral equivalente.

b) Forme un operador T sobre un espacio completo ***Hint:*** *¿Qué espacio demostramos en la P1 que era completo?*

a) Notemos que si $x \in C^1([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R})$ resuelve la EDO

$\Rightarrow$ x resuelve necesariamente

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \quad \text{(Sale de integrar la EDO entre } t_0 \text{ y } t)$$

Además, si encontramos $x \in C([t_0 - a, t_0 + a])$ que resuelva esta ec. integral, entonces, por Teo. fundamental del cálculo x es una solución continuamente diferenciable de la EDO inicial.

i.e. la EDO con c.i para $x \in C^1()$ es equivalente a la ec. integral para $x \in C^0()$ ∎

b) Sea β como en el enunciado del teorema, $I := [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ e $y \in C(I)$

Definimos el operador

$$T(y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \;, \quad t \in I$$

y definimos el conjunto

$$X := \{ y \in C(I) ;\; y(t_0) = x_0 ,\; \underbrace{\sup_{t \in I} |x_0 - y(t)| \leq c\beta}_{\|y - x_0\|_\infty \leq c\beta} \}$$

Por construcción, X es un subespacio cerrado (con la métrica d_∞) de $C(I)$.

Como ya probamos que $(C(I), d_\infty)$ es completo y X es subconjunto cerrado $\Rightarrow$ (X, d_∞) es completo.

c) Pruebe que el operador T es una contracción.

d) Concluya mediante el teorema de punto fijo de Banach que la EDO inicial tiene solución y esta es única.

c) Primero debemos probar que $T(y) \in X$.

c) Primero debemos probar que $T(y) \in X$.

En primer lugar, notemos que $T(y)(t_0) = x_0$ ✓

Además,

$$|x_0 - T(y)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds\right| \leq \underbrace{(t - t_0)}_{\substack{\leq \beta \text{ pues} \\ t \in [t_0-\beta,\, t_0+\beta]}} \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq C \text{ por enunciado}}$$

$$\leq C\beta$$

$\therefore \|x_0 - T(y)\|_\infty \leq C\beta \wedge T(y)(t_0) = x_0 \Rightarrow T(y) \in X$ ☺

Ahora debemos mostrar que es una contracción:

Sean $y_1, y_2 \in X$, tenemos

$$|T(y_1)(t) - T(y_2)(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\right) ds\right|$$

$$\leq \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \beta} \sup_{s \in I} K|y_1(s) - y_2(s)|$$ (Porque f es K-Lipschitz c/r a su 2do argumento por enunciado)

$$\leq \beta K d_\infty(y_1, y_2)$$

Luego, el lado derecho es independiente de t, por ende podemos tomar $\sup_{t \in I}(\ )$ a ambos lados, quedando

$$\sup_{t \in I} |T(y_1)(t) - T(y_2)(t)| \leq \beta K d_\infty(y_1, y_2)$$

$$\Leftrightarrow d_\infty(T(y_1), T(y_2)) \leq \beta K d_\infty(y_1, y_2)$$

Y, por enunciado del teorema, $\beta \cdot K < 1 \Rightarrow T$ es una contracción.

d) Luego, por Teo. de punto fijo de Banach, $\exists!\, x \in C(I)$ tq

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

Y, como vimos en la parte (a), esto es equivalente a decir que

$\exists!\, x \in C^1(I)$ tq $x'(t) = f(t, x(t))$

Concluyendo y probando el teorema ■