Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 Análisis
Primavera 2024
Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Martín Berríos y Ricardo Ziegele

Auxiliar 3: Espacios métricos completos y punto fijo

P1. (**Aplicación de punto fijo de Banach**)

Sea $C([a,b],\mathbb{R})$ el espacio de las funciones reales continuas con dominio en el intervalo $[a,b]$, y sea la métrica d_∞ la métrica inducida por la norma del supremo esencial, i.e

$$d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

a) Pruebe que el espacio métrico $((C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ es completo.

b) Dada la siguiente ecuación integral

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

donde $g(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$, $k(x,y) \in C([a,b]^2,\mathbb{R})$, encuentre las condiciones sobre λ para que exista solución a esta ecuación. (***Hint:*** *Note que la ecuación es de la forma $T(f) = f$, y use Punto fijo de Banach)*

P2. **(Propiedades de espacios completos)**

a) Suponga (X,d_1) y (Y,d_2) dos espacios métricos, donde (X,d_1) es completo. Sea E un conjunto cerrado en X y sea $f : E \to Y$ una función continua. Pruebe que, si se tiene

$$d_2(f(x_1),f(x_2)) \geq d_1(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X$$

Entonces $f(E)$ es cerrado.

b) Sea $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ una isometría sobreyectiva. Pruebe que si (X,d_1) es completo, entonces (Y,d_2) lo es también.

c) Dados (X,d_1), (Y,d_2) espacios métricos completos, pruebe que $Z = X \times Y$ es completo con la métrica del producto

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left((d_1(x_1,x_2))^2 + (d_2(y_1,y_2))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

P3. **(Teorema de Picard-Lindelöf via punto fijo)** Sea el problema de valor inicial

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x), \quad x(0) = x_0$$

donde $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función dada y $x(t)$ es la función desconocida de la EDO. Usaremos el teorema de punto fijo de Banach para demostrar el teorema de Picard-Lindelöf, que nos asegura existencia y unicidad de la solución de la ecuación anterior. Recordemos el enunciado del teorema:

Teorema (Picard-Lindelöf). Sea f continua en un rectángulo

$$R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\},$$

y por tanto acotada en R, digamos $|f(t,x)| \leq c$. Supongamos que f satisface una condición de Lipschitz en R con respecto a su segundo argumento, es decir, existe una constante k tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x - y| \quad \text{para todo } (t,x),(t,y) \in R.$$

Entonces, el problema de valor inicial tiene una solución única que existe en un intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, donde

$$\beta < \text{mín}\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}.$$

a) Re-escriba la EDO en forma de una ecuación integral y enuncie el problema integral equivalente.

b) Forme un operador T sobre un espacio completo ***Hint:*** *¿Qué espacio demostramos en la P1 que era completo?*

c) Pruebe que el operador T es una contracción.

d) Concluya mediante el teorema de punto fijo de Banach que la EDO inicial tiene solución y esta es única.