

P1) Sea S conjunto cualquiera, y $\mathcal{F}(S) := \{X \in \mathcal{P}(S); |X| < +\infty\}$. Se define

$d: \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ como $d(A, B) = |A \Delta B|$, donde

$A \Delta B := A \cup B \setminus A \cap B$. Demostremos que $d(\cdot, \cdot)$ es una métrica:

1) PDQ: $d(A, A) = 0$

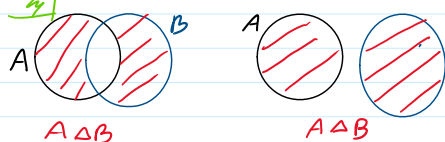
En efecto, $d(A, A) = |A \Delta A| = |A \cup A \setminus A \cap A| = |A \setminus A| = |\emptyset| = 0$

2) (Positividad): PDQ: $\forall A, B \in \mathcal{F}(S)$ t.q. $A \neq B$, $d(A, B) > 0$

Dem: Si $A \neq B$, entonces $A \Delta B \neq \emptyset$ y como la cardinalidad de un cto no vacío es siempre positiva, se concluye que

$$d(A, B) = |A \Delta B| > 0$$

$\frac{1}{2}$ $A \neq B$ nos da sólo dos opciones, $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$



En ambos casos, $A \Delta B \neq \emptyset$ ✓

3) (Simetría) PDQ: $d(A, B) = d(B, A)$

↳ Directo de la simetría del operador Δ

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B = B \cup A \setminus A \cap B = B \cup A \setminus B \cap A = B \Delta A$$

$$\Rightarrow d(A, B) = |A \Delta B| = |B \Delta A| = d(B, A) \quad \square$$

4) (Desigualdad triangular) PDQ: $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{F}(S)$

Para esto, en primer lugar recordemos que:

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

y que para cualquier A, B, C uno puede escribir:

$$A \setminus B = ((A \setminus B) \cap C) \cup ((A \setminus B) \setminus C) \quad (\text{particionar } A \setminus B \text{ como "lo que está en } C, \text{ y lo que no está"})$$

Podemos probar que $((A \setminus B) \cap C) \cup ((A \setminus B) \setminus C) \subseteq (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

En efecto: Sea $x \in A \setminus B \Rightarrow \underbrace{x \in (A \setminus B) \cap C}_{(1)} \vee \underbrace{x \in (A \setminus B) \setminus C}_{(2)}$

(1) Si $x \in (A \setminus B) \cap C \Rightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C$. Como $x \notin B$ (por estar en $A \setminus B$) y $x \in C$, esto implica que $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$$\Rightarrow A \setminus B \cap C \subseteq (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(2) Si $x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in A, x \notin B$ y $x \notin C$. Luego, necesariamente $x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \setminus C \subseteq (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\therefore A \setminus B \subseteq (C \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (I)$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \cap C \subseteq (C \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$\therefore A \setminus B \subseteq (C \setminus B) \cup (A \cap C) \quad (I)$$

De manera análoga, podemos probar que

$$B \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup (B \cap C) \quad (II)$$

Luego, usando I, II obtenemos

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq \underbrace{(C \setminus B)} \cup \underbrace{(A \cap C)} \cup \underbrace{(C \setminus A)} \cup \underbrace{(B \cap C)} \\ &= (A \cap C) \cup (C \setminus A) \cup (B \cap C) \cup (C \setminus B) \\ &= (A \Delta C) \cup (B \Delta C) \quad / \text{Sacamos el cardinal} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(A, B) = |A \Delta B| &\leq |(A \Delta C) \cup (B \Delta C)| \quad \left(\text{Res } |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B| \right) \\ &\leq |A \Delta C| + |B \Delta C| \\ &= d(A, C) + d(B, C) \end{aligned}$$

Probando así, la desigualdad triangular. Como tenemos (1), (2), (3) y (4) se concluye que $d(A, B) = |A \Delta B|$ define una métrica sobre $\mathcal{F}(S)$.

P2 | Sean (X, d_x) y (Y, d_y) dos EM.

2) PDQ: $d: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2)\}$$

Definir una métrica en $X \times Y$.

En efecto: Como siempre, debemos probar las 4 propiedades que deben satisfacer las distancias:

(1) $d((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = 0 \rightarrow$ partamos del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_1, y_1)) &= \max\{d_x(x_1, x_1), d_y(y_1, y_1)\} \\ &= \max\{0, 0\} \quad \text{pues } d_x, d_y \text{ son distancias} \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(2) (Positividad) $\rightarrow$ Es directo, pues tomamos máximo entre 2 distancias que son, por def. de distancias, positivas.

(3) (Simetría) $\rightarrow$ veámoslo

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2)\} \\ &= \max\{d_x(x_2, x_1), d_y(y_2, y_1)\} \quad \text{pues } d_x \text{ es simétrica} \\ &= \max\{d_x(x_2, x_1), d_y(y_2, y_1)\} \quad \text{pues } d_y \text{ es simétrica} \end{aligned}$$

$$= \max(d_X(x_2, x_1), d_Y(y_1, y_2)) \text{ pues } d_X \text{ es simétrica}$$

$$= \max(d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)) \text{ pues } d_Y \text{ es simétrica}$$

$$= d((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \therefore d \text{ simétrica.}$$

4) Desigualdad triangular: Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ y } (x_3, y_3) \in X \times Y$, queremos

$$\text{Probar que } d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2))$$

→ Veamos:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$$

$$\text{Esto es igual o a } d_X(x_1, x_2), \text{ o a } d_Y(y_1, y_2)$$

Veámoslo por casos:

$$\begin{aligned} \text{I) } d(\cdot, \cdot) = d_X(x_1, x_2) &\stackrel{\text{tri}}{\leq} d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2), \text{ luego, por def. de máximo} \\ &\leq \max(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) + d_X(x_3, x_2), \text{ y análogamente} \\ &\leq \max(d_X(x_1, x_3), d_Y(y_1, y_3)) + \max(d_X(x_3, x_2), d_Y(y_3, y_2)) \\ &= d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) \checkmark \end{aligned}$$

Esto es siempre cierto, pero todo es ≥ 0 y en el peor de los casos se tiene con igualdad.

II) $d(\cdot, \cdot) = d_Y(y_1, y_2)$ es completamente análogo.

Luego, por I) y II), se tiene que $d(\cdot, \cdot)$ satisface la desigualdad triangular y, ya que satisface (1), (2), (3) y (4), es una métrica en $X \times Y$.

b) Sea $\mathbb{K} \in \mathbb{M}$, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ función continua. PDQ:

$$f_a: Y \rightarrow \mathbb{K}, \quad f_b: X \rightarrow \mathbb{K}$$

$$y \mapsto f(a, y), \quad x \mapsto f(x, b)$$

Son continuas. (para $a \in X, b \in Y$ arbitrarios)

Dem: En efecto:

Primero, seguimos la inducción, i.e. dotamos a $X \times Y$ de d_{oo} .

Sea $\varepsilon > 0$ y $y_0 \in Y$. Como f es continua, lo es en particular en el punto (a, y_0) . Luego, $\exists \delta > 0$ tal que

$$d_{\text{oo}}((a, y), (a, y_0)) \leq \delta \Rightarrow d_{\mathbb{K}}(f(a, y), f(a, y_0)) < \varepsilon \quad (\star)$$

$$\text{Pero } d_{\text{oo}}((a, y), (a, y_0)) = \max\{d_X(a, a), d_Y(y, y_0)\}$$

$$= \max\{0, d_Y(y, y_0)\}$$

$$= d_Y(y, y_0)$$

Luego, $(\star)$ se lee como:

$$1 \text{ o } d_Y(y, y_0) < \delta \Rightarrow d_Y(y, y_0) < \delta$$

Luego, (*) se lee como:

$$d_Y(Y, Y_0) \leq \delta \Rightarrow d_X(f(Z, Y), f(Z, Y_0)) \leq \epsilon$$

$$\Leftrightarrow d_Y(Y, Y_0) \leq \delta \Rightarrow d_{f_Z}(f_Z(Y), f_Z(Y_0)) \leq \epsilon$$

De donde concluimos que f_Z es continua. El desarrollo para f_b es completamente análogo.

P31

2) Sea (X, d) un EM, y $e(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$. PDQ: $e(\cdot, \cdot)$ define una métrica sobre X .

En efecto: Nuevamente debemos probar (1), (2), (3), (4).

(1) PDQ: $e(x, x) = 0$

$$\hookrightarrow \text{Sea } x \in X \text{ arbitrario. } e(x, x) = \frac{d(x, x)}{1 + d(x, x)} = \frac{0}{1 + 0} = 0 \quad \checkmark \text{ (pues } d \text{ es una función distancia)}$$

(2) (Positividad) $\rightarrow$ Es directo de que $d(\cdot, \cdot)$ es una distancia

$$\Rightarrow d(x, y) > 0 \quad \forall x \neq y$$

$$\Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} > 0 \quad \forall x \neq y$$

$$\Rightarrow e(x, y) > 0 \quad \forall x \neq y$$

Probando lo que queríamos.

Por la simetría de $d(\cdot, \cdot)$

(3) (Simetría)

$$\hookrightarrow e(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = e(y, x) \quad \checkmark$$

(4) (Des. triangular)

$\hookrightarrow$ Para demostrarlo, en primer lugar, probaremos que la función

$t \mapsto \frac{t}{1+t}$ es creciente para $t \in \mathbb{R}^+$. Como es continua,

basta ver su derivada:

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \rightarrow f'(t) = \frac{1+t - t}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} > 0 \quad \forall t$$

Luego, recordemos que $d(\cdot, \cdot)$ es distancia, por ende, $\forall x, y, z \in X$ se tiene que:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$\Rightarrow f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y))$ pues f creciente

$$\Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

y como $d(x,z) \geq 0$, $d(z,y) \geq 0$ y $1+d(x,z)+d(z,y) \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \quad (\text{Añadimos el denominador convenientemente})$$

$$\Leftrightarrow e(x,y) \leq e(x,z) + e(z,y)$$

$\Leftrightarrow e$ cumple la desigualdad triangular.

Luego, se concluye que $e(\cdot, \cdot)$ define una métrica en X .

b) Mostrar que, dado (X, e) de la parte anterior, X tiene diámetro finito

En efecto, sean $x, y \in X$ arbitrarios. Se tiene siempre que

$d(x,y) < 1 + d(x,y)$, dividiendo por $1 + d(x,y)$ obtenemos,

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = e(x,y) < 1$$

$\Rightarrow 1$ es cota superior del conjunto $\{d(x,y) \mid x, y \in X\}$

Por lo tanto, $\text{diam}(X) = \sup \{d(x,y) \mid x, y \in X\} \leq 1$

c) Dado $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ familia de EM, y $S: \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)}$$

Concluit que $S(\cdot, \cdot)$ define una métrica sobre $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Dem: Notemos que

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x_i, y_i) \rightarrow \text{Asumiremos por ahora que la serie converge, al final lo probamos :)}$$

y ya probamos en la parte a) que $e_i(x_i, y_i) = \frac{d_i(x_i, y_i)}{1+d_i(x_i, y_i)}$

es, en efecto, una distancia. Por ende, $S(x,y)$ satisface las mismas

propiedades de distancia (positividad: $e_i(x_i, y_i) \geq 0 \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x_i, y_i) \geq 0$ ✓ Simetría:

es, en efecto, una métrica. Por ende, (X, d) cumple las mismas

Propiedades de distancia (positividad: $e_i(x, y) \geq 0 \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x, y) \geq 0$ ✓ Simetría: $e_i(x, y) = e_i(y, x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(y, x)$, Además $e_i(x, x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x, x) = 0$ ✓
Y por último, la desigualdad triangular: Notemos que $\forall i \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$e_i(x, y) \leq e_i(x, z) + e_i(z, y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^i} e_i(x, y) \leq \frac{1}{2^i} (e_i(x, z) + e_i(z, y)) \quad / \sum_{i=1}^{\infty}$$

$$\Leftrightarrow S(x, y) \leq S(x, z) + S(z, y) \quad \square$$

Por ende, sólo nos queda demostrar que $S(x, y)$ es continua y bien definida.

Continuidad: En la P2)b) probamos (en el caso finito) que la proyección $X_1 \rightarrow X_i$ es continua. Esto es generalizable al producto infinito también!

Más aún, la proyección de la topología producto es siempre continua, i.e.

$$\pi_i: \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow X_i \quad \text{es continua!}$$

$$x \mapsto x_i$$

$$\text{Luego, notemos que } S(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \underbrace{e_i(\pi_i(x), \pi_i(y))}_{\substack{e_i(\cdot, \cdot) \text{ es continua} \rightarrow \\ \text{Pues es una distancia, por la P2) a)}} \quad \text{en } (X_i, e_i)$$

Por composición de continuas, $e_i(\pi_i(x), \pi_i(y))$ es continua, y como suma de continuas es continua, $S(x, y)$ es una función continua en $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \times \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Por último, debemos ver que $S(x, y)$ está bien definida. En otras palabras, que la serie converge. Sean $x, y \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$,

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x, y), \text{ Recordemos que en b) vimos que } e_i(x, y) < 1$$

$$\Rightarrow S(x, y) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot 1, \text{ ¿Esta serie converge?}$$

Como $\frac{1}{2^i} \geq 0 \forall i \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el criterio d'Alembert o del cociente:

$$\text{i.e. Dada una serie } \sum_{i=1}^{\infty} a_i \geq 0, \text{ si } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = L \in (0, 1), \text{ entonces la}$$

serie converge. En este caso:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{i+1}}}{\frac{1}{2^i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^i}{2^{i+1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

Luego, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge!

Finalmente, por criterio de comparación directa,

$$\text{como } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \text{ converge y } a_i \geq b_i \geq 0 \text{ para todo } i, \text{ entonces } \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{ converge.}$$

Finalmente, por criterio de comparación directa,

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge y está acotada superiormente a $S(x, y)$

$$\Rightarrow S(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} e_i(x_i, y_i) \text{ converge}$$

$\Rightarrow S(x, y)$ cumple (1), (2), (3), (4) es continua y bien definida

$\Rightarrow S(\cdot, \cdot)$ define una distancia en $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$