Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 Análisis
Primavera 2024
Profesora: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Martín Berríos y Ricardo Ziegele

Auxiliar 1: Espacios Métricos

Auxiliar: Ricardo Ziegele

P1. Sea S un conjunto cualquiera y $\mathcal{F}(S) := \{X \in \mathcal{P}(S); |X| < +\infty\}$ el conjunto de los subconjuntos de S con cardinalidad finita. Se define una función $d : \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(A,B) = |A\Delta B|$$

Donde Δ corresponde a la diferencia simétrica y $|\cdot|$ al cardinal del conjunto. Pruebe que d es una métrica sobre $\mathcal{F}(S)$.

Indicación: *Recuerde que la diferencia simétrica es dada por* $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

P2. (Métrica en espacios producto) Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos.

a) Pruebe que la función $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

define una métrica. (*Nota: esta métrica se llama la métrica del supremo, y se denota* d_∞)

b) Sea $\mathcal{K}$ un espacio métrico y $f : X \times Y \longrightarrow \mathcal{K}$ una función continua. Pruebe usando la parte anterior que $f_a : Y \longrightarrow \mathcal{K}$ y $f_b : X \longrightarrow \mathcal{K}$ definidas por $f_a(y) = f(a, y)$ y $f_b(x) = f(x, b)$ son continuas.

P3. (Un clásico)

a) Sea (X, d) un espacio métrico y $e(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ para todo $x, y \in X$. Pruebe que $e(\cdot, \cdot)$ define una métrica sobre X.

b) Usando (X, e) de la parte anterior, concluya que, con esa métrica, X tiene diámetro finito.

c) Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia (infinita) de espacios métricos y sea $\delta : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \times \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$

Use las partes anteriores para concluir que δ define una métrica sobre $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Hint: *Recuerde lo que probamos en la P2.b) sobre las proyecciones, y los criterios de convergencia para una serie.*