MA3403 Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Maximiliano Valladares y Sebastián Lemus

Resumen Inferencia Estadística

13. Inferencia Estadística

Definición 13.1: Una familia paramétrica sobre $\mathcal{X}$ es una colección de medidas de probabilidad $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta(\cdot) : \theta \in \Theta\}$ sobre $\mathcal{X}$, indexada por un parámetros $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ finito dimensional. El conjunto Θ se denomina espacio de parámetros.

Definición 13.2: Cuando los datos $x_1, ..., x_n$ son generados por un vector aleatorio $X = (X_1, ..., X_n)$, cuyas componentes X_i son variables aleatorias $\mathbb{P}_\theta$-independientes e idénticamente distribuidas (iid), con distribución domún F_θ para todo $\theta \in \Theta$, decimos que X o bien $X_1, ..., X_n$ es una muestra aleatoria simple (abreviado MAS) de F_θ. En el caso de que las X_i posean densidad común f_θ, decimos que X es una MAS de f_θ y tenemos:

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Si las X_i son discretas, con función de probabilidad común p_θ, decimos que X es una MAS de p_θ y tenemos:

$$p_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$$

Con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Definición 13.3: Sea $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta(\cdot) \mid \theta \in \Theta\}$ una familia paramétrica y $g : \Theta \to \mathbb{R}^l$ una función. Un estimador de $g(\theta)$ se define como una función $\widehat{g} : \mathcal{X} \to g(\Theta)$.

Observación: Por extensión, si $\widehat{g}$ es un estimador de $g(\theta)$, el vector aleatorio $\widehat{g}(X)$ suele llamarse también estimador de $g(\theta)$. Por otra parte, el vector (no aleatorio) $\widehat{g}(x)$ se denomina estimación de $g(\theta)$.

Definición 13.4: Sea $\widehat{g}$ es un estimador de $g(\theta)$, donde $g, \widehat{g}$ son funciones con valores reales. Se define el ECM de $\widehat{g}$ como:

$$\mathrm{ecm}_\theta\left(\widehat{g}\right) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\widehat{g}(X) - g(\theta)\right)^2\right]$$

El ECM de $\widehat{g}$ mide la discrepancia cuadrática entre $\widehat{g}(X)$ y $g(\theta)$. Mientras más pequeño seal el ECM, mejor es el estimador.

Definición 13.5: Sean $\widehat{g}_1, \widehat{g}_2$ estimadores de $g(\theta)$. Diremos que $\widehat{g}_1$ es mejor que $\widehat{g}_2$ (en el sentido del ECM), si:

$$\mathrm{ecm}_\theta\left(\widehat{g}_1\right) \leq \mathrm{ecm}_\theta\left(\widehat{g}_2\right)$$

Para todo $\theta \in \Theta$ y si existe un $\theta_0 \in \Theta$ tal que $\mathrm{ecm}_\theta\left(\widehat{g}_1\right) < \mathrm{ecm}_\theta\left(\widehat{g}_2\right)$.

Definición 13.6: Sea $\widehat{g}$ un estimador de $g(\theta)$. Se define el sesgo de $\widehat{g}$ como:

$$b_\theta\left(\widehat{g}\right) = \mathbb{E}_\theta\left(\widehat{g}(X)\right) - g(\theta) \text{ con } \theta \in \Theta$$

Se dice que $\widehat{g}$ es un estimador insesgado de g_θ si $b_\theta(\widehat{g}) = 0$ para todo $\theta \in \Theta$, o bien, de mandera equivalente, si:

$$\mathbb{E}_\theta\left(\widehat{g}(X)\right) = g(\theta)$$

Para todo $\theta \in \Theta$. A un estimador que no es sesgado se llama insesgado.

Lema 13.7: Sea $\widehat{g}$ un estimador insesgado de $g(\theta)$. Entonces:

$$\mathrm{ecm}_\theta(\widehat{g}) = \mathrm{Var}_\theta(\widehat{g}(X)) \text{ con } \theta \in \Theta$$

Definición 13.8: Un estimados máximo verosímil (EMV) de θ se define como un maximizante, con respecto a θ, de $p(x;\theta)$ o de $f(x;\theta)$, según si X es discreto o absolutamente continuo. Es decir:

- Si X es discreto, un EVM de θ es una función $\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$ tal que:
$$p(x; \hat{\theta}(x)) \geq p(x, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta, \forall x$$
- Si X es continuo, con función de densidad $f(x;\theta)$, un EVM de θ es una función $\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$ tal que:
$$f(x; \hat{\theta}(x)) \geq f(x, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta, \forall x$$
- El EVM de $g(\theta)$ se define como $g(\hat{\theta})$, donde $\hat{\theta}$ es un EVM de θ.