

Auxiliar 14

EDP

Profesor: Ricardo Carlos Freire
 Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Nos proponemos resolver la ecuación en derivadas parciales no homogénea siguiente

$$(*) = \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 1, & x \in (0, \pi/2), t > 0, \\ u(0, t) = 1, u_x(\pi/2, t) = -\pi/2, \\ u(x, 0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x, u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

- a) Considerando el cambio de variable $w(x, t) = u(x, t) + f(x)$, donde u es solución del sistema anterior; determine f tal que w es solución de

$$(**) = \begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, & x \in (0, \pi/2), t > 0, \\ w(0, t) = 0, w_x(\pi/2, t) = 0, \\ w(x, 0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\pi x - 1, w_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

- b) Pruebe que si $w(x, t) = M(x)N(t)$, entonces M verifica

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0, \\ M(0) = 0, \\ M'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Además, pruebe que para $\lambda_n = (2n + 1)^2$ se obtienen las soluciones no triviales de la forma $M_n(x) = \sin((2n + 1)x)$ con $n \geq 0$.

Indicación: Analice los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

- c) (1.0 puntos) Use λ_n del ítem anterior para concluir que w tiene la forma

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos((2n + 1)t) + B_n \sin((2n + 1)t)] \sin((2n + 1)x).$$

Indicación: Determine la forma general de $N(t)$ para dicho valor λ_n .

- d) Use la condición $w(x, 0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1$ para determinar A_n ; y use que $w_t(x, 0) = 0$ para concluir que $B_n = 0$ para todo $n \geq 0$. **Integrales útiles:**

$$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C$$

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2 \cos(x) + 2x \sin(x) + C$$

e) Determine la solución del sistema (*).

Pregunta 2

Considere el problema

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 \quad (\text{EQ}) \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{CB}) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} |u(x, y)| < \infty, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x \mapsto u(x, y), f(x) \text{ integrables}$$

a) Si $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de $u(\cdot, y)$ con respecto a la variable x (para cada y fijo), deduzca que se tiene la ecuación:

$$\hat{u}_{yy} - s^2 \hat{u} = 0$$

Y deduzca que la solución general es:

$$\hat{u}(s, y) = A(s)e^{|s|y} + B(s)e^{-|s|y}$$

b) Deduzca imponiendo (CB) y la condición $\lim_{y \rightarrow \infty} |u(x, y)| < \infty$ que

$$\hat{u}(s, y) = \hat{f}(s)e^{-|s|y}$$

c) Concluya, utilizando propiedades de convolución e inversión de la Transformada de Fourier, que:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$