

P1 f función 2T-periódica con serie dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right]$$

Un paciente está enfermo si:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{12} (a_n^2 + b_n^2) > 13$$

Suponiendo que $f(t) = 1-t$, $t \in [-1, 1]$.

a) Pdg Desigualdad de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{T} \int_{-T}^T (f(t))^2 dt$$

De la identidad de Parseval es directo que:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Como $(a_n^2 + b_n^2) \geq 0 \quad \forall n \geq 1$, entonces

$$+ \frac{a_0^2}{2} \left(\sum_{n=1}^{\overset{N \rightarrow N \text{ fijo arbitrario}}{\infty}} (a_n^2 + b_n^2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T (f(t))^2 dt //$$

b) Calculemos la serie de $f(t) = 1-t$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (1-t) dt \\ &= t \Big|_{-1}^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\underline{n \geq 1} \quad a_n = \int_{-1}^1 (1-t) \cos(n\pi t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 \cancel{\cos(n\pi t)} dt - \int_{-1}^1 t \cancel{\cos(n\pi t)} dt$$

$\swarrow$ coseno integrado en su período (o múltiplos de su período) $\swarrow$ impar · par = impar
 $\searrow$ $\searrow$ 0

$$= 0$$

$$b_n = \int_{-1}^1 (1-t) \sin(n\pi t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 \cancel{\sin(n\pi t)} dt - \int_{-1}^1 t \cancel{\sin(n\pi t)} dt$$

$\swarrow$ Seno integrado en su período $\swarrow$ impar · impar = par
 $\searrow$ 0 $\searrow$ 0

$$= 2 \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt$$

IPP

$$t = u \Rightarrow dt = du$$

$$\sin(n\pi t) dt = dv \Rightarrow -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi t) = v$$

$$= 2 \left[-\frac{t}{n\pi} \cos(n\pi t) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi t) dt \right]$$

$= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$ $= \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \Big|_0^1$

$$= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = (-1)^n$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

c) Teniendo los coef. es posible evaluar directamente si se cumple que

$$\frac{0.9}{2} + \sum_{n=1}^{12} (a_n^2 + b_n^2) > 13$$

i.e. $1 \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{12} \frac{4(-1)^{2n}}{(\pi n)^2} \geq 13 ?$

Pero es mucho más fácil aplicar la desigualdad de Bessel pues:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{12} \frac{4}{(\pi n)^2} &\leq \int_{-1}^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-2t+t^2) dt \\ &= 2 - 2 \int_{-1}^1 t dt + 2 \int_0^1 t^2 dt \\ &= 2 + \frac{2}{3} \\ &= 2 + \frac{2}{3} < 13 \end{aligned}$$

$\therefore$ El paciente no está enfermo

P_2

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = \delta(t)$$

Aplicando TF a ambos lados de la igualdad

$$\widehat{\ddot{x}}(\omega) + 2\gamma \widehat{\dot{x}}(\omega) + \omega_c^2 \widehat{x}(\omega) = \widehat{\delta(t)}$$

$\frac{d^n}{dx^n} f = (i\omega)^n f$

$$(i\omega)^2 \widehat{x}(\omega) + 2\gamma i\omega \widehat{x}(\omega) + \omega_c^2 \widehat{x}(\omega) = \widehat{\delta(t)}(\omega)$$

$$\widehat{x}(\omega) (-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_c^2) = \widehat{\delta(t)}(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(\omega) = \frac{\widehat{\delta(t)}(\omega)}{-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_0^2}$$

Calculemos $\widehat{\delta(t)}(\omega)$ por definición:

$$\widehat{\delta(t)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt$$

$e^0 = 1$ por indicación

$$\Rightarrow \widehat{\delta(t)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\cdot] \left(\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_0^2)} \right) \\ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}(-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_0^2)} d\omega \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2\gamma\omega i + \omega_0^2} d\omega \end{aligned}$$

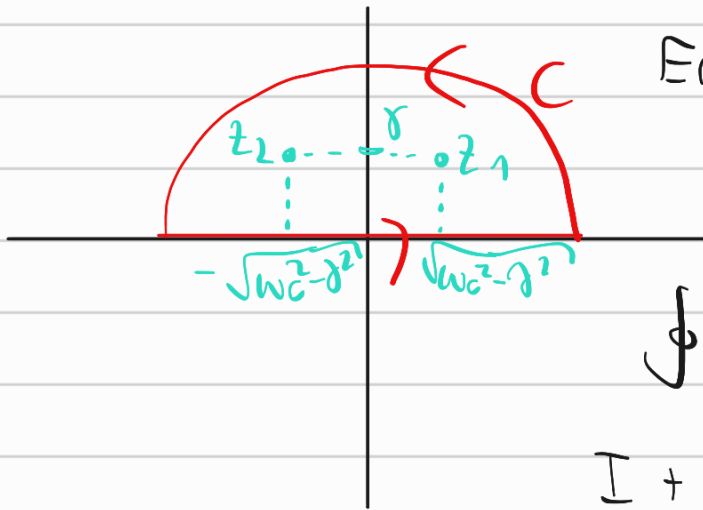
la calcularemos por residuos

El procedimiento estándar $\Rightarrow$ Definir $f(z) = \frac{e^{izt}}{-z^2 + 2\gamma zi + \omega_0^2}$
 Polos en $-z^2 + 2\gamma zi + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \underline{z_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

Hay que tener cuidado con el término e^{izt} al definir el contorno de integración pues puede diverger para $z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$ con $R \rightarrow \infty$.

$$e^{izt} = e^{itR\cos\theta} e^{-R(t\sin\theta)} \quad \text{para que no diverja cuando } R \rightarrow \infty$$

$t > 0$ Como $t \sin \theta > 0 \Rightarrow \sin \theta$
 $\Rightarrow$ Se cierra por arriba



En virtud del teo de los residuos sobre C:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2))$$

$$I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\text{arco}} f(z) dz$$

ya que $\propto e^{-Rt \sin \theta}$

$$\Rightarrow I = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2))$$

Calculemos los residuos:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{e^{izt}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{e^{iz_1 t}}{z_1 - z_2}$$

$$= \frac{e^{it(i\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$= \frac{e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{e^{izt}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{e^{iz_2 t}}{z_2 - z_1}$$

$$= \frac{e^{it(i\gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})}}{-2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$= -\frac{e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2) = i \frac{e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2} t)}{\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2}}$$

$$x(t) = -\frac{e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2} t)}{\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2}} \quad t > 0$$

Para $t < 0$, $\sin \theta < 0$ el camino se debe cerrar por abajo no obstante no hay ningún polo con $\text{Im} < 0$ sigue que $x(t) = 0 \quad t < 0$.

P2

$$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in [-\pi, 0] \\ \frac{1}{2} & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

a) Calculamos la serie de f como

$$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1$$

Primero notamos que f es impar ya que comprueba $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$, por lo tanto $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$.

Calculando b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{\text{impar}}{f(x)} \overset{\text{impar}}{\sin(nx)} \overset{\text{par}}{dx}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\cancel{2}} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(-\cos(\overset{(-1)^n}{n\pi}) + \cos(0) \right)$$

$$= \frac{1}{n\pi} \underbrace{\left((-1)^{n+1} + 1 \right)}_{= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2 & n \text{ impar} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow S_f = \sum_{n \text{ impar}} \frac{2}{n\pi} \sin(nx)$$

b) Recordamos Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Reemplazando el lado izquierdo con lo obtenido en el pto anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impar}} \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(f(x))^2}_{\text{par}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx \\ &= \frac{\pi}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\stackrel{n=2k-1}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

c) Como f continua por trozos:

$$S_f = \frac{1}{2} (f(0)^- + f(0)^+)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 0$$

Comentario: $S_f(\pi) = S_f(-\pi) = 0$



P4

$$\mathcal{F}\left\{ \phi'' + 2x\phi' + (2\varepsilon + 1)\phi(x) = 0 \right\}$$

$$\widehat{\phi''}(s) + \widehat{2x\phi'}(s) + (2\varepsilon + 1)\widehat{\phi}(s) = 0$$

$$(is)^2 \widehat{\phi}(s) + \widehat{2x\phi'}(s) + (2\varepsilon + 1)\widehat{\phi}(s) = 0$$

calculemos
esto a parte

$\widehat{x\phi'}(x)$: 2 formas para calcular esto:

- Saber que $\widehat{x f(x)} = i \frac{d}{ds} \widehat{f}(s)$:

$$\begin{aligned} \widehat{x\phi'}(s) &= i \frac{d}{ds} (\widehat{\phi'}(s)) \\ &= i \frac{d}{ds} (is \widehat{\phi}(s)) \\ &= - \frac{d}{ds} (s \widehat{\phi}(s)) \\ &= - \widehat{\phi}(s) - s \frac{d}{ds} \widehat{\phi}(s) = \widehat{\phi'}(s) \neq \widehat{\phi}(s) \end{aligned}$$

$\downarrow \widehat{\phi'}(s) = is \widehat{\phi}(s)$

- Por definición:

$$\widehat{x\phi'}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) x e^{-isx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) i \frac{d}{ds} (e^{-isx}) dx$$

$i \frac{\partial}{\partial s} (e^{-isx})$

$\downarrow$ Leibniz $\frac{d}{ds} \int = \int \frac{\partial}{\partial s}$

$$= i \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) e^{-isx} dx \right)$$

$$= i \frac{d}{ds} (is \widehat{\phi}(s))$$

$\widehat{\phi'}(s) = is \widehat{\phi}(s)$

$$= -\frac{d}{ds}(s\hat{\phi}(s))$$

$$= -\hat{\phi}(s) - s\frac{d}{ds}\hat{\phi}(s)$$

Reemplazando en la ec original

$$(is)^2\hat{\phi}(s) + 2\hat{x}\hat{\phi}(s) + (2\varepsilon+1)\hat{\phi}(s) = 0$$

$$-s^2\hat{\phi}(s) - 2\hat{\phi}(s) - 2s\hat{\phi}'(s) + 2\varepsilon\hat{\phi}(s) + \hat{\phi}(s) = 0$$

$$\Rightarrow (-s^2 + (2\varepsilon - 1))\hat{\phi}(s) = 2s\hat{\phi}'(s)$$

EDU para $\hat{\phi}(s)$ (más sencilla que la original)

Resolviendo por separación de variables (de EDO no EDP)

$$C + \int ds \left(\frac{(-s^2 + (2\varepsilon - 1))}{2s} \right) = \frac{\hat{\phi}'(s)}{\hat{\phi}(s)}$$

$$C + \int \left(-\frac{s}{2} + \frac{2\varepsilon-1}{2} \frac{1}{s} \right) ds = \int \frac{d\hat{\phi}(s)}{\hat{\phi}(s)} ds$$

$$C - \frac{s^2}{4} + \frac{2\varepsilon-1}{2} \int \frac{1}{s} ds = \int \frac{d\hat{\phi}}{\hat{\phi}}$$

$$\exp(\cdot) \left(C - \frac{s^2}{4} + \frac{2\varepsilon-1}{2} \ln(s) = \ln \hat{\phi} \right)$$

$$\hat{\phi}(s) = A e^{-s^2/4} (e^{\ln s})^{2\varepsilon-1/2}$$

$$\hat{\phi}(s) = A e^{-s^2/4} s^{\frac{2\varepsilon-1}{2}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\cdot) \left(\phi(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4} s^{\frac{2\varepsilon-1}{2}} e^{isx} ds \right)$$

Esta integral se puede resolver con residuos pero excede a las herramientas del curso, así que la dejamos expresada no más (por eso la dejé hasta ahí en el enunciado).