Auxiliar 13

Preparación C3

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Una de las áreas de aplicación de las series de Fourier es el análisis del diagnóstico de enfermedades cardíacas. En particular, la señal de un electrocardiograma (ECG) puede modelarse como una función periódica $f(t)$ con periodo $2T$, cuya serie de Fourier es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right).$$

A partir de estos coeficientes, se puede evaluar el estado de salud de un paciente y determinar si está enfermo cuando

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{12} (a_n^2 + b_n^2) > 13$$

Suponga que el ECG de un paciente está representado por la función $f(t) = 1 - t$ en el intervalo $[-1, 1]$, periódica con periodo $2T = 2$. La tarea es determinar si el paciente está enfermo o no. Para ello, siga los siguientes pasos:

a) Pruebe la desigualdad de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} (f(t))^2 \, dt.$$

para cualquier entero positivo N.

b) Calcule los coeficientes de Fourier de la función $f(t) = 1 - t$.

c) Determine si el paciente está enfermo o no.

Pregunta 2

Considere un oscilador armónico amortiguado con constante de amortiguación γ, frecuencia natural w_0 y fuerza externa $F(t)$. La ecuación diferencial que modela el sistema es

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = F(t)$$

donde $x(t)$ es la posición del oscilador en el tiempo t. Suponga se aplica una fuerza de duración infinitesimal al oscilador en $t = 0$, es decir, $F(t) = \delta(t)$, con $\delta(t)$ la función delta de Dirac. Resuelva la ecuación diferencial para $t > 0$ y determine la posición del oscilador para todo t. [**Indicación:**] La función delta Dirac cumple con la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

para cualquier función $f(t)$.

Pregunta 3

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(a) Calcule la serie de Fourier de f.

(b) Use la identidad de Parseval para calcular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(c) Indique a qué converge la serie de Fourier para $x = 0$.

Pregunta 4

El oscilador armónico cuántico es un modelo fundamental en física, utilizado en diversas áreas como óptica cuántica y teoría del estado sólido. Una característica clave de este modelo es que sus estados estacionarios (o estados propios) tienen energías cuantizadas y están descritos por funciones de onda en el espacio de coordenadas. La ecuación diferencial que describe las funciones de onda estacionarias es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(2\epsilon - x^2\right) \psi = 0, \tag{1}$$

donde hemos utilizado variables adimensionales: $\epsilon = E_n/(\hbar\omega)$ representa la energía del estado n dividida por $\hbar\omega$, y $x = X/l_0$ es la coordenada espacial dividida por la escala característica del oscilador $l_0 = \sqrt{\hbar/(M\omega)}$. Sustituyendo $\psi(x) = e^{x^2/2}\phi(x)$ en la ecuación (1), se obtiene la ecuación diferencial

$$\phi''(x) + 2x\phi'(x) + (2\epsilon + 1)\phi(x) = 0 \tag{2}$$

Resuelva la ecuación (2) mediante transformada de fourier y demuestre que la solución es

$$\phi(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4} k^{\frac{2\epsilon-1}{2}} e^{ikx}\, dk$$