

P₁

a) $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Por definición de TF:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-isx} dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{red arrow} \\ |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-a(-x)} e^{-isx} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-isx} dx \right) \\ &\quad \downarrow \text{cu } x' = -x \quad dx' = -dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-ax'} e^{isx'} (-dx') + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-isx} dx \right) \\ &\quad \text{cancelamos - dando vuelta límites} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{isx} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-isx} dx \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \underbrace{(e^{isx} + e^{-isx})}_{= 2 \cos(sx)} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(sx) dx \quad \text{I}$$

IPP $\left(\begin{array}{l} u = e^{-ax} \quad \frac{d}{dx} \Rightarrow du = -a e^{-ax} \\ dv = \cos(sx) dx \Rightarrow v = \frac{\sin(sx)}{s} \end{array} \right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[e^{-ax} \frac{\sin(sx)}{s} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(sx)}{s} + a e^{-ax} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-ax} \sin(sx)}{s} \right) - \frac{e^0 \sin(0)}{s} + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(sx) dx \right]$$

IPP de nuevo $\left(\begin{array}{l} u = e^{-ax} \quad \frac{d}{dx} \Rightarrow du = -a e^{-ax} \\ dv = \sin(sx) dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(sx)}{s} \end{array} \right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{a}{s} \left(e^{-ax} \right) \frac{\cos(sx)}{s} \right]_0^\infty - \frac{a^2}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-ax} \cos(sx) dx}_I$$

$= -I$

$$\Rightarrow I = \frac{a}{s^2} \left(-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-ax} \cos(sx)}{s} + \frac{e^0 \cos(0)}{s} \right) - \frac{a^2}{s} I$$

$$I = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} I$$

$$\Rightarrow I = \frac{a}{s^2} \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right)^{-1}$$

$$= \frac{a}{s^2} \left(\frac{s^2}{s^2 + a^2} \right)$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{s^2 + a^2}$$

b) $g(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$

Por definición:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-isx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + isx)} dx$$

completamos cuadrado

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2 + isx + \left(\frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)} dx$$

$= \left(\sqrt{a}x + \frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{\left(\frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

no depende de x, se puede sacar

$= I$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{is}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

$u = \sqrt{a}x + \frac{is}{2\sqrt{a}}$
 $du = \sqrt{a} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$= \sqrt{\pi}$ integral gaussiana

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Rightarrow \hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-s^2/4a}$$

c) $h(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$

2 formas de hacerla:

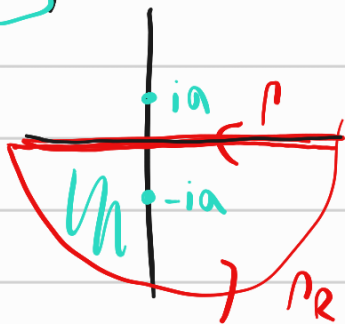
1) Por definición y residuos:

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} e^{-isx} dx$$

Sea $f(z) = \frac{ae^{-isz}}{z^2 + a^2}$. Polos en $z_1 = ia$ y $z_2 = -ia$.

Para formar el contorno de integración analizamos el término e^{-isz} :

Si $s > 0$, $z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta \Rightarrow e^{-isz} = e^{-i s R \cos\theta} e^{-s R \sin\theta}$
 acotado cuando $R \rightarrow \infty$ (para $\theta \in (\pi, 2\pi)$)
 puede divergir o irse a cero cuando $R \rightarrow \infty$ (para $\theta \in (0, \pi)$)



$$C = P \cup R$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_P f(z) dz + \int_R f(z) dz$$

$\int_P f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-isx}}{a^2 + x^2} dx$ (with $z=x$)
 $\int_R f(z) dz \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ ya que $f(z) \propto e^{-sR \sin\theta}$ and $\sin\theta < 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-isx}}{a^2 + x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -ia)$$

$$\lim_{z \rightarrow -ia} (z+ia) \frac{ae^{-isz}}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{ae^{-is(-ia)}}{-2ia} = \frac{ae^{-sa}}{-2ia}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-isx}}{a^2 + x^2} dx = \pi e^{-sa}$$

$$\Rightarrow \hat{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-sa}, \quad s > 0$$

Análogamente para $s < 0$, cerrando C por arriba (se encierra ia en vez $-ia$, donde $\sin \theta > 0$):

$$\hat{h}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{sa}, \quad s < 0$$

Lo que se puede escribir en un solo termino como:

$$\hat{h}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

2) Usando Dualidad:

Por item (a) $\Rightarrow \mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$

$$\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}\right] = e^{-a|s|} \quad \text{Dual}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{a}{a^2 + x^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$$

d) $p(x) = 1_{[-b,b]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-b,b] \\ 0 & \text{si } |x| = b. \end{cases}$

$$\hat{p}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[-b,b]}(x) e^{-isx} dx$$

aplicando def de $1_{[-b,b]}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-isx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{is} e^{-isx} \right]_{-b}^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s} \left[\frac{e^{isb} - e^{-isb}}{i} \right] \frac{2}{2}$$

$\sin''(sb)$

$$\hat{p}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(sb)}{s}$$

P2
a) Pdq

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underset{\text{LHS}}{g^*(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{RHS}}{\hat{f}(s)} \hat{g}^*(s) ds$$

Partiendo de LHS:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\left(\hat{g}(s) \right)^v \right)^*(x) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(s) e^{isx} ds \right)^* dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^*(s) e^{-isx} ds \right) dx \quad \text{conjugación} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^*(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \hat{g}^*(s) ds = \hat{f}(s) \end{aligned}$$

b) Ahora para obtener la identidad de Parseval basta tomar $g=f$ y aplicar Plancherel:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \hat{f}^*(s) ds \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds \end{aligned} \quad \downarrow \quad z z^* = |z|^2$$

P3

Sea $\mathcal{F}[g(x)](s) = \mathcal{F}[f(x)](s) e^{-s^2}$. Pdq):

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} dy$$

El problema tiene toda la pinta de aplicar teo de de convolución, pero para ello primero hay que determinar la antiTF de e^{-s^2} . Usando el resultado de la P1(b) y dualidad:

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}](s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}\right] = e^{-(s)^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}^{-1}[e^{-s^2}]\right) = \cancel{\mathcal{F}^{-1}\left[\cancel{\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}\right]}\right]} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}$$

Sigue que:

$$\mathcal{F}[g(x)](s) = \underbrace{\mathcal{F}[f(x)](s)}_{\cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-s^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \mathcal{F}\left[\left(f * \mathcal{F}^{-1}[e^{-s^2}]\right)(x)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}[g(x)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left[\left(f * \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}\right)(x)\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(f * \left(e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)\right)(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} dy$$

$f * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y) dy$

P3

Queremos resolver la ec diferencial de Airy dada por:

$$y''(x) - x y(x) = 0$$

Aplicamos TF a ver qué pasa:

$$\mathcal{F}[y''](k) - \mathcal{F}[xy](k) = 0$$

$$(ik)^2 \mathcal{F}[y](k) - \mathcal{F}[xy(x)](k) = 0$$

Analizemos esto con más detalle

$$\mathcal{F}[xy(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x y(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) [x e^{-ikx}] dx$$

$$= i \frac{d}{dk} e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) i \frac{d}{dk} (e^{-ikx}) dx$$

$$= i \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-ikx} dx \right)$$

sale fuera de la integral
pq lo otro no depende de k

$$= \hat{y}(k)$$

$$= i \frac{d}{dk} \hat{y}(k)$$

Por lo tanto la ec de Airy al aplicar TF toma la sgte forma

$$-k^2 \hat{y}(k) - i \hat{y}'(k) = 0$$

$$\hat{y}'(k) = ik^2 \hat{y}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(k) = A e^{i \int k^2 dk}$$

$$= A e^{i \frac{k^3}{3}}$$

Aplicando anti TF tenemos la sol general:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{ik^3/3} e^{ikx} dk$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx + \frac{k^3}{3})} dk$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx + \frac{k^3}{3}) dk + \frac{iA}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx + \frac{k^3}{3}) dk$$

$$\text{si } \tilde{A} = C \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= C \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx + \frac{k^3}{3}) dk$$

$$= 2 A_i(x)$$

$$2 D B_i(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = C A_i(x) + C_2 B_i(x) \quad \text{/solución más general}$$

una de las soluciones linealmente independientes