Auxiliar 12

Transformada de Fourier

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$

b) $g(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$

c) $h(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$

d)

$$p(x) = \mathbb{1}_{[-b,b]} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-b, b] \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Pregunta 2

a) Usando la definición de TF (y anti TF) demuestre la identidad de Plancherel (* representa conjugación y asuma que f y g son cuadrado integrables)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{g}^*(s)\, ds$$

b) Con lo anterior demuestre la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2\, ds$$

Pregunta 3

Sea una función $g(x)$ tal que $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$. Demuestre que

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(\frac{x-y}{2})^2}\, dy.$$

Pregunta 4

Se define la ecuación diferencial de Airy como

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Pruebe que la función

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(kx + \frac{k^3}{3}\right) dk$$

es una solución de (1). Dicha función se conoce como función de Airy y aparece de forma natural en contextos simples de óptica y mecánica cuántica.

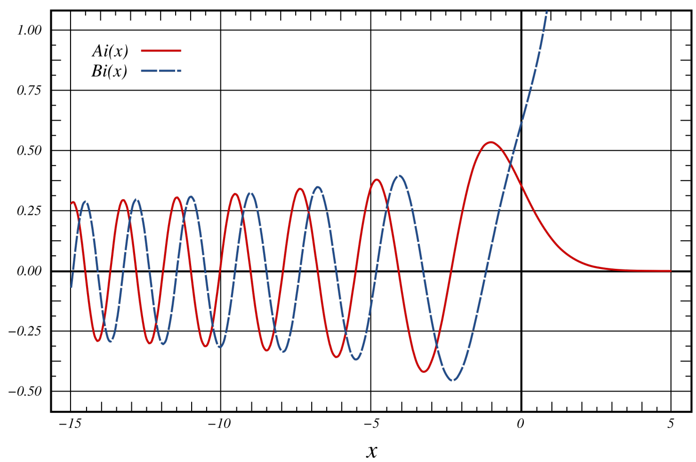

Figura 1: Gráficas de la función $\mathrm{Ai}(x)$ y la otra solución linealmente independiente $\mathrm{Bi}(x)$.

Transformada de Fourier

- Dada $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se tiene que su Transformada y Antitransformada de Fourier son respectivamente

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-isx}dx$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(s)e^{isx}ds$$

Función	**Transformada de Fourier**
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$f^{(k)}(x)$	$(is)^k\hat{f}(s)$
$f(x-a)$	$e^{-ias}\hat{f}(s)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(s-a)$
$f(ax); a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
$f*g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$e^{-ax^2}; a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$
$\frac{a}{a^2+x^2}; a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert s\rvert}$
$\frac{a^3-ax^2}{(a^2+x^2)^2}; a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}a\lvert s\rvert e^{-a\lvert s\rvert}$
$\begin{cases}1 & \text{si } \lvert x\rvert\leq a\\ 0 & \text{sino}\end{cases}; a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(as)}{s}$

Dualidad: Si $\hat{g}(s)$ es la transformada de Fourier de $g(x)$, entonces la transformada de Fourier de $\hat{g}(x)$ será una versión reflejada de $g(s)$, es decir:

$$\mathcal{F}\{\hat{g}(x)\} = g(-s).$$

En otras palabras, si

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-isx}\,dx,$$

entonces

$$\mathcal{F}\{\hat{g}(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x)e^{-isx}\,dx = g(-s).$$