FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Series de Fourier

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) Considere la función periódica de periodo 2π, definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Encuentre la serie de Fourier de la función f.

b) Usando la serie de Fourier obtenida anteriormente pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pregunta 2

Considere $f(x) = \cos(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Pruebe que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx)$$

Y ocupe esto para probar lo siguiente:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

Pregunta 3

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a) Demuestre la identidad de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

b) Pruebe que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Series de Fourier

Series de Fourier
Sea $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Se define la serie de Fourier de f como:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \, dx$$

Propiedad: Función par
Si $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ es una función integrable y par, entonces la serie de Fourier de f es:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)$$

Propiedad: Función impar
En cambio, si f es impar:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)$$