P1

Diferenciabilidad en $\Omega \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow$ se cumplen condiciones de C.R

a) $f(z)=\bar{z}$. Sea $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$
$$= u(x,y)+iv(x,y)$$
$$u=x \wedge v=-y \quad (\text{diferenciables en } \mathbb{R}^2)$$

Veamos C.R:
$$\cancelto{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \cancelto{-1}{\frac{\partial v}{\partial y}} \quad \wedge \quad \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial x}}$$
$$1=-1$$

CR no se cumple

Por contrarecíproca:

no se cumple C.R $\Rightarrow$ f no es diferenciable

b) $e^x(\cos(y)-i\sin(y)) = \underbrace{e^x\cos y} - i\underbrace{e^x\sin y}$
$$= u(x,y)+iv(x,y)$$
$$\Rightarrow u=e^x\cos y \wedge v=-e^x\sin y \quad (\text{diferenciables en } \mathbb{R}^2)$$

Veamos C.R
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)=\frac{\partial}{\partial y}(-e^x\sin y) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)=-\frac{\partial}{\partial x}(-e^x\sin y)$$

$$\cancel{e^x}\cos y=-\cancel{e^x}\cos y \qquad\qquad -e^x\sin y = e^x\sin y$$
$$\cancel{2}\cos y=0 \qquad\qquad \cancel{2}\sin y=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \qquad\qquad \Rightarrow y=n\pi \quad n\in\mathbb{Z}$$

Para $y\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cap\{n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}$ se cumple la condición no obstante la intersección es vacía $\Rightarrow$ no se cumple CR en ningún pto

$\Rightarrow$ f no es diferenciable en $\mathbb{C}$

c) $f(z)=e^{-x}(\cos y - i\sin y) = \underbrace{e^{-x}\cos y}_{u} - i\underbrace{e^{-x}\sin y}_{-v}$

Veamos C.R
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-e^{-x}\cos y\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=-e^{-x}\cos y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{se cumple } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=-e^{-x}\sin y\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=e^{-x}\sin y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{se cumple } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\therefore$ $f(z)$ cumple CR y tanto $u$ como $v$ son dif. en $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ $f(z)$ es holomorfa/derivable $\forall z \in \mathbb{C}$

**P2**

a) Pd) Desigualdad ML:
Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (conjunto de funciones holomorfas en $\Omega$, $p \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tq $\overline{D}(p,r) \subseteq \Omega$ ($f$ holomorfa en complemento de $D(p,r)$, subconjunto de $\Omega$). Definiendo $M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|$ (supremo o máximo absoluto de $f(z)$

sobre el contorno $\partial D(p,r)$) entonces:

$$\left| \oint_{\partial D(p,r)} f(z)\, dz \right| \leq M_r\, \ell(\partial D(p,r))$$

Partimos del lado izq y vamos acotando:

desigualdad triangular integral

$$\left| \oint_{\partial D(p,r)} f(z)\, dz \right| \leq \oint_{\partial D(p,r)} |f(z)||dz|$$

$|f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)| = M_r$

$$\leq \oint_{\partial D(p,r)} M_r |dz|$$

$$= M_r \underbrace{\oint_{\partial D(p,r)} |dz|}_{\text{def de longitud de curva en } \mathbb{C}}$$

def de longitud de curva en $\mathbb{C}$

$$= M_r\, \ell(\partial D(p,r)) \quad \blacksquare$$

Desigualdad de Cauchy (mismas hipotésis que antes)

Pdq) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad |f^{(k)}(p)| \leq \dfrac{k!\, M_r}{r^k}$

Como dice el enunciado es un corolario de la formula de diferenciación de Cauchy asi que partamos por eso:

$$\frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}}\,dz$$

$|\cdot|$

$$\left|\frac{f^{(k)}(p)}{k!}\right| = \frac{1}{|2\pi|\cancel{|i|}^{\,1}}\left|\oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}}\,dz\right|$$

desigualdad $\Delta$ integral

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D(p,r)} \left|\frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}}\right| |dz|$$

cv $z = p + re^{i\theta}$ $\Rightarrow dz = re^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{|(\cancel{p}+re^{i\theta}-\cancel{p})^{k+1}|}\,|rie^{i\theta}|\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{|r^{k+1}|\,\cancel{|e^{i\theta(k+1)}|}^{\,1}}\,|r|\,\cancel{|i|}\,\cancel{|e^{i\theta}|}^{\,1}\,d\theta$$

no dependía de $\theta$, sale de la $\int$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\cancel{r}}{r^{k+\cancel{1}}}\right| \oint_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})|\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r^k}\oint_0^{2\pi} |f(p+re^{i\theta})|\,d\theta$$

$|f(p+re^{i\theta})| \leq M_r$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^k}\oint_0^{2\pi} M_r\,d\theta$$

$$= \frac{M_r}{\cancel{2\pi} r^k}\,\cancel{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{|f^{(k)}(p)|}{|k!|} \leq \frac{M_r}{r^k}$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(p)| \leq \frac{M_r\,k!}{r^k} \blacksquare$$

b) Pdq) Sea $f$ analitica en todo $\mathbb{C}$ tq $|f(z)| \leq |z| \log(|z|)$ $\forall |z| \geq R > 1$, entonces $f$ es necesariamente un polinomio de grado 1.

Primero desmenuzamos la info importante:

- $f$ analitica $\Rightarrow$ se puede escribir como serie de potencias

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k}_{= \frac{f^{(k)}(p)}{k!}} (z-p)^k$$

- Se tiene la cota $|f(z)| \leq |z| \log(|z|)$ $\forall |z| > r > 1$

Con esta info y la indicación del enunciado, aplicamos desigualdad de Cauchy a ver dónde nos lleva:

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{\overbrace{M_r}^{= \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|} k!}{r^k}$$

Recordamos que el supremo se define como la menor de las cotas superiores de un conjunto, por lo tanto sin pérdida de generalidad:

$$|f(z)| \leq \overbrace{M_r}^{\text{la menor de las cotas sup de } \partial D(p,r)} \leq |z| \log(|z|) \quad (\forall |z| > r > 1)$$

$$\Rightarrow \frac{|f^{(k)}(p)|}{k!} \leq \frac{|z| \log(|z|)}{r^k} \qquad \Rightarrow \boxed{r > 1}$$

Para relacionar fácilmente $|z|$ con $r$ podemos hacer $z = re^{i\theta}$ ($\Rightarrow p = 0$):

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{r \log(r)}{r^k}$$

$$= \frac{\log(r)}{r^{k-1}}, \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}}$$

importante

¿Qué pasa si $r \to \infty$?

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\cancel{\log(r)}^{\to\infty}}{\cancel{r^{k-1}}_{\to \infty\ \forall k \geq 2}} = 0$$

El logaritmo crece asintoticamente más lento que los polinomios $z^m$ $m=k-1 \geq 1$ $k\geq 2$

Por lo tanto $C_k = 0 \quad \forall k \geq 2$, pues

$$|C_k| = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \cancel{\frac{\log(r)}{r^{k-1}}} \to 0 \quad \begin{matrix} r\to\infty \\ k\geq 2\end{matrix}$$

módulos son mayores a 0

$$0 \leq |C_k| \leq 0$$

$\Rightarrow$ $C_k = 0$, sandwich

Y así los únicos coefs que no son identicamente 0 son $C_0$ y $C_1$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

$$= C_0 \cancel{z^0}^{1} + C_1 z^1$$

$$= \boxed{C_0 + C_1 z}$$

polinomio de grado 1

$\boxed{P_3}$

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\,d\theta$$

Utilizamos el cv usual $\quad z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} \left(z+z^{-1}\right)^{2n} \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{dz}{iz}$$

esto está implícito cuando hacemos CV $z=e^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2^n i} \oint_{|z|=1} \left(z+z^{-1}\right)^{2n} z^{-1}\,dz$$

Utilizando teo del Binomio para expandir $(z+z^{-1})^{2n}$:

$$\left(z+z^{-1}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k}\left(z^{-1}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k}$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{i2^n} \oint_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}\,dz$$

se puede intercambiar $\Sigma$ por $\int$ (uno quiere que converja)

$$= \frac{1}{i2^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \oint_{|z|=1} z^{2n-2k-1}\,dz$$

$2n-2k-1 = m$

$$= \frac{1}{i2^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \oint_{|z|=1} z^m\,dz$$

Dependiendo del signo de $m$ la integral se podrá evaluar directamente por Cauchy Gousat o residuos. Si $m \geq 0$ $\oint_{|z|=1} z^m dz = 0$ ya que $z^m$ fn holomorfa en $\mathbb{C}$. Si $m<0$, entonces

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^{-m}} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0)$$

polo de orden $m$

$$\underbrace{\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\cancel{z^{-m}} \frac{1}{\cancel{z^{-m}}}\right)}_{= \begin{cases} 1 & m=-1 \\ 0 & m<-1 \end{cases}}$$

Si $m=-1 \Rightarrow 2n-2k-\cancel{1} = -\cancel{1} \Rightarrow \boxed{k=n}$ único término que aporta a la serie (para todos los otros $k$ la integral

$\oint_{|z|=1} z^m \, dt = 0$). Por lo tanto:

$$\boxed{I = \frac{1}{2^{2n} \cancel{i}} \binom{2n}{n} 2\pi \cancel{i}}$$

**P3)** Sea $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n = \sum_{k=1}^{n} k z^k$ y

$$T_n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \sum_{k=1}^{n} z^k$$

a) Pdq)

$$S_n = \frac{T_n - n z^{n+1}}{1-z}$$

En efecto, multiplicando por $1-z$ y partiendo del lado izquierdo:

$$(1-z)S_n = (1-z)\sum_{k=1}^{n} k z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k z^k - \sum_{k=1}^{n} k z^{k+1} \qquad k' = k+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k z^k - \sum_{k'=2}^{n+1} (k'-1) z^{k'}$$

último término

$$= z + \sum_{k=2}^{n} k z^k - \left( \sum_{k'=2}^{n} (k'-1) z^{k'} - (n+\cancel{1}-\cancel{1}) z^{n+1} \right)$$

primer término

$$= z + \sum_{k=2}^{n} \left(\cancel{k} - (\cancel{k} - 1)\right) z^k - n z^{n+1}$$

$$= z + \sum_{k=2}^{n} z^k - n z^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z^k - n z^{n+1}$$

$$= T_n(z) - n z^{n+1}$$

b) Para determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underset{c_k}{\underset{\shortparallel}{k}} z^k$ aplicamos criterio del cociente:

$$C_k = k \wedge C_{k+1} = k+1$$

$$\Rightarrow R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{k+1} \right|$$
$$= 1$$

Para calcular la suma de la serie partimos del resultado anterior:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{\sum_{k=1}^{n} z^k - nz^{n+1}}{1-z}$$

$n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} z^k - \lim_{n\to\infty}(nz^{n+1})}{1-z}$$

$\to 0$ límite de la forma $na^n$ con $a<1$ vale $0$

$(*)$

Ahora recordamos que:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{1-(1-z)}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

Reemplazando

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-z}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$+0z^0$ término "cero"

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}}$$