Auxiliar 10

Preparación C2

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Estudiar en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones (suponiendo $z = x + iy$):

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = e^{x}(\cos(y) - i\sin(y))$

c) $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$

Pregunta 2

a) Demuestre las siguientes desigualdades

Desigualdad ML y de Cauchy

Sea Ω abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(p,r) \subseteq \Omega$. Si definimos $M_r = \sup_{z\in\partial D(p,r)} |f(z)|$, entonces

$$\left| \oint_{\partial D(p,r)} f(z)\, dz \right| \leq M_r \ell(\partial D(p,r))$$

donde $\ell(\partial D(p,r))$ representa la longitud del camino cerrado $\partial D(p,r)$.
Y además (corolario de fórmula de diferenciación de Cauchy), para todo $k \geq 0$, se cumple que

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

b) Ocupando lo anterior demuestre que para una función f analítica en todo $\mathbb{C}$ tal que $|f(z)| \leq |z|\log(|z|)$ para todo $|z| \geq r > 1$, entonces f es necesariamente un polinomio de grado uno.

Pregunta 3

Calcule

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$$

Indicación: Puede ser útil recordar el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Pregunta 4

Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n$ y $T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$.

a) Demuestre que

$$S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1-z}$$

b) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} kz^k$, y utilizando el resultado anterior, calcule la suma de dicha serie.