

a) Polos de $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Para ver sing. simplemente hay que imponer cuando se indefine la función. En este caso es fácil ver que los z tq $\cos(z)=0$ son singularidades. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \cos(z) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow z_n &= \frac{\pi}{2} + n\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\text{polos de } \tan(z) \end{aligned}$$

Los polos también tienen orden, el cual se obtiene viendo el valor del sgte límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad z_0 \text{ polo de orden } k$$

Para este caso:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_n} (z-z_n) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} &= \underbrace{\sin(z_n)}_{\text{bien definido}} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z-z_n}{\cos(z) - \cos(z_n)} \\ &\quad \text{def derivada} \\ &= \frac{1}{\cos'(z_n)} = \frac{1}{-\sin(z_n)} \\ &= - \frac{\cancel{\sin(z_n)}}{\cancel{\sin(z_n)}} \neq 0 \neq \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow z_n$ polos de orden 1

b) Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Veamos denominador para los polos:

$$\begin{aligned} 1+z^4 &= (z^2+i)(z^2-i) \quad / \text{ suma por dif.} \\ &= (z+i\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i}) \\ &\quad z_4 = -i\sqrt{i} \quad z_2 = i\sqrt{i} \quad z_3 = -\sqrt{i} \quad z_1 = \sqrt{i} \end{aligned}$$

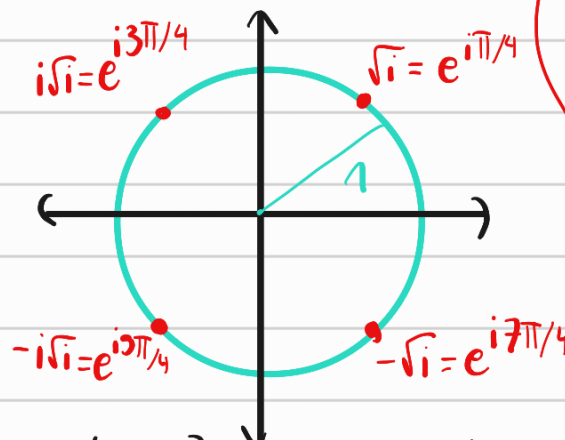
Pero hay una forma más compacta de representarlas, ocupando la forma polar

Notamos que i en forma polar es $e^{i\pi/2}$. Esto implica que $\sqrt{i} = (i)^{1/2} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4}$. Además $-1 = e^{i\pi}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{i} = e^{i\pi/4} \\ z_2 &= i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z_3 &= -\sqrt{i} = e^{i\pi} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ z_4 &= -i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_n = e^{i \frac{(2n-1)\pi}{4}} \quad n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Es decir, en el plano complejo

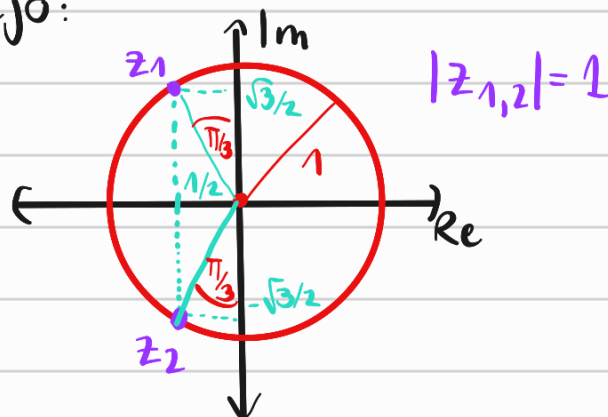


Ansatz orden $k=1$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z-z_n)^k}{(z-z_n)^1 \prod_{j \neq n} (z-z_j)} &= \frac{z_n^2}{\prod_{j \neq n} (z_n - z_j)} \neq 0 \quad j \neq n \\ &\neq \infty \\ &\Rightarrow z_n \text{ orden } 1 \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{1+z^2+z}$. Imponiendo $z^2+z+1=0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4}{2}}$
 $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 polos simples

En el plano complejo:



d) $e^{1/z}$ en este caso la singularidad es claramente $z=0$. No obstante es especial ya que si intentas calcular su orden:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{1/z}$$

Expandiendo $e^{1/z}$ en serie de potencia:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$
$$u = \frac{1}{z} \quad \downarrow \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Reemplazando en el limite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-k}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^k + z^{k-1} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \dots \right)$$

Empieza a diverger
 $n=k+1$ $\downarrow$

Viendo la sumatoria, para un k arbitrario siempre habrá un $n > k$ tal que el limite esté mal definido en $z=0$, por lo que no hay ningún orden permitido. A este tipo de singularidades se les llama esenciales.

P₂

a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ disco de radio 2, Γ circunferencia unitaria con centro en el origen $\mathcal{O}$ y sea $a \in \mathbb{C}$ t.q. $|a| > 1$. Suponiendo que f es holomorfa en el disco D y además se cumple que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = 0$$

Piden calcular $f'(\frac{1}{a})$ por lo que una buena idea es aplicar la formula de diferenciación de Cauchy (que permite calcular derivadas de funciones integrando fns complejas con polos). Para aplicarla debemos identificar los polos y ver si el camino de integración los encierra. En nuestro caso:

$$\frac{f(z)}{(az-1)^2} = \frac{f(z)}{\left(a\left(z - \frac{1}{a}\right)\right)^2} = \frac{f(z)}{a^2 \left(z - \frac{1}{a}\right)^2} \stackrel{!}{=} 0 \text{ polos}$$

$a^2(z - \frac{1}{a})^2 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{a}$ polo. Veamos su orden (Ansoatz $k=2$, así aparece tb info sobre la derivada de f al aplicar Cauchy):

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} \left(z - \frac{1}{a} \right)^{\overset{\text{orden}}{2}} \frac{f(z)}{a^2(z - \frac{1}{a})^2} = \frac{f(\frac{1}{a})}{a^2} \neq \infty \neq 0$$

$\Rightarrow z = \frac{1}{a}$ polo de orden 2

Y como $|a| > 1 \Rightarrow |\frac{1}{a}| < 1$ lo que permite asegurar que se encierra por Γ (si no se encierran polos las integrales cerradas son 0 por Cauchy Goursat). Teniendo todas las hipótesis, en virtud de la fórmula de diferenciación de Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Aplicado a nuestro caso $n+1=2 \Rightarrow n=1$ y $z_0 = \frac{1}{a}$, por lo tanto:

$$f'(\frac{1}{a}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{a^2(z - \frac{1}{a})^2} dz$$

$= 0$ por enunciado

$= 0$

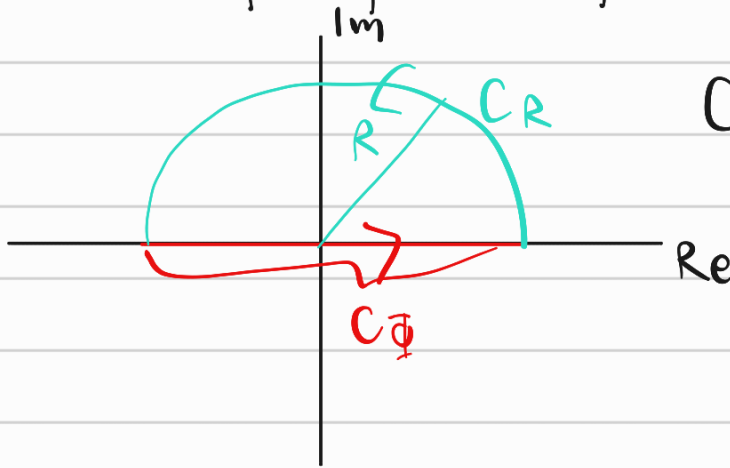
Concluyendo el resultado.

b) Calcular

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

Esto es una integral real la cual puede ser resuelta con los métodos típicos de diferencial. Sin embargo para este caso particular se hace muy tedioso. Por ello una de las principales aplicaciones del teorema de los residuos es facilitar el cálculo de este tipo de integrales impropias con primitivas complicadas.

Para ello lo primero que se hace es definir $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ (cambiar x por z básicamente). Lo segundo es definir un contorno de integración cerrado que permita calcular la integral real (recta en el eje real). La elección de la forma de este contorno es arbitraria, no obstante se suele optar por simplicidad la siguiente:



$$C = C_R \cup C_\Phi$$

En virtud del teo de los residuos de $f(z)$ sobre C :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j)$$

$$\Rightarrow \int_{C_\Phi} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j) \quad (*)$$

polos de f
encerrados por C

Y es que si hacemos tender R a infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_\Phi} f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{z=x \in [-R, R]} f(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \Phi \end{aligned}$$

Reemplatando en $(*)$:

$$\Phi = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz$$

Teniendo ahora sí una fórmula para calcular Φ . Veamos primero cuánto vale el primer término $2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j)$,

lo que implica calcular el residuo de los polos encerrados por C .

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \Rightarrow \underbrace{(z^2+1)^2}_{(z+i)(z-i)} = 0$$

$$\Rightarrow (z+i)^2(z-i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow z_i = i \text{ y } z_{-i} = -i \text{ polos}$$

Notamos que el único polo encerrado es i (C está en la porción de $\text{Im} > 0$). Veamos su orden y con ello su residuo (fórmula de residuo cambia según el orden). Por norma general el orden coincidirá con la multiplicidad algebraica de la raíz. En efecto fijando $k=2$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \cancel{(z-i)^2} \frac{z^2}{\cancel{(z-i)^2} (z+i)^2} \\ &= \frac{i^2}{(2i)^2} \neq \infty \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_i = i \text{ polo de orden } 2$$

Calculemos su residuo con la fórmula:

$$k=2 \quad z_0=i \quad \left(\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) \right)$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\cancel{(z-i)^2} \frac{z^2}{\cancel{(z-i)^2} (z+i)^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2i(2i)^2 - 2i^2(2i)}{(2i)^4} = \frac{(2i)^3 + 2(2i)}{(2i)^4} \\ &= \frac{-4+2}{2^3 i^3} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

Por lo tanto $2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \cancel{2\pi i} \cdot \cancel{\frac{1}{4i}} = \frac{\pi}{2}$

Ahora veamos el valor del otro término:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz$$

Por lo general estas integrales se van a ir a cero pero en este control hay que demostrarlo (en el examen normalmente no es necesario, basta con asegurar que el grado del numerador de f es al menos 2 veces menor que el del denominador).

Demostremos que se va a cero:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \stackrel{\text{desigualdad } \Delta \text{ integral}}{\leq} \int_{C_R} |f(z)| dz && C_R \text{ circunf. radio } R \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 |e^{i\theta}|^2}{|R^2 e^{2i\theta} - 1|^2} |iR e^{i\theta}| d\theta && \Rightarrow z = R e^{i\theta} \Rightarrow dz = iR e^{i\theta} d\theta \\
 &= R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{|R^2 e^{2i\theta} - 1|^2} d\theta && \theta \in (0, 2\pi) \\
 &\leq R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 |e^{2i\theta}| - 1)^2} d\theta && |u| - |v| \leq |u - v| \Rightarrow \frac{1}{|u - v|} \leq \frac{1}{|u| - |v|} \\
 &= \frac{R^3}{(R^2 - 1)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\pi R^3}{(R^2 - 1)^2} \stackrel{R \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0
 \end{aligned}$$

Sigue que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, y finalmente

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \underbrace{2\pi i \operatorname{Res}(f, i)}_{\pi/4} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz \\
 &\Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

P3 $f(z) = \frac{e^{z^2} \sin(z)}{z^3(z+i)}$

Los ceros son tq $\sin(z)=0 \wedge z^3(z+i) \neq 0$

$$\Rightarrow z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Los polos por su parte son tq $z^3(z+i)=0 \Rightarrow z_1=0 \wedge z_2=-i$

veamos sus ordenes

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 e^{z^2} \sin(z)}{z^3(z+i)} = \frac{1}{i} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{z^2} \sin(z)}{z^3} = \frac{e^{-2i} \sin(-i)}{(-i)^3} \neq 0$$

Sigue que $z_1=0$ es de orden 2 y $z_2=-i$ de orden 1.

c) Sea $z_0=1+i$, $z_1=0$ y $z_2=-i$



$$|z_0 - z_1| = \sqrt{2} \wedge |z_0 - z_2| = \sqrt{5}$$

Caso $r < \sqrt{2}$ no se encierra ningún polo por lo que en virtud de Cauchy-Goursat (f es holomorfa) $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$

Caso $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$ Se encierra $z_1=0$ polo de orden 2. En virtud del Teorema de los residuos:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1=0)$$

El residuo lo calculamos con formula conocida (reconociendo $n=2$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{z^2} \sin(z)}{z^3(z+i)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^2} (2 \sin(z) + \cos(z)) z(z+i) - (2z+i) e^{z^2} \sin(z)}{z^2(z+i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \frac{2e^{z^2}(z+i) - e^{z^2}}{(z+i)^2} + \frac{e^{z^2}}{(z+i)} \cdot \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2} \end{aligned}$$

* Usando L'Hopital para $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos(z) - \sin(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \sin(z) + \cos(z) - \cos(z)}{2z} = 0$

Por algebra de límites:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= 1 - 2i \\ \Rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (1 - 2i) \\ &= \underline{2\pi i + 4\pi} \end{aligned}$$

Caso $r > \sqrt{5}$ Se encierra z_1 y z_2 , por lo que en virtud del teo de los residuos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -i))$$

El residuo de $z_1 = 0$ ya lo calculamos. Ahora el residuo en z_2 es:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{2z} \sin(z)}{(z+i)z} \\ &= \frac{-e^{-2i} \sin(i)}{1} = \underline{ie^{-2i} \sin(i)} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\underbrace{1 - 2i}_{\text{Res}(f, 0)} + \underbrace{ie^{-2i} \sin(i)}_{\text{Res}(f, i)} \right)$$

P₄

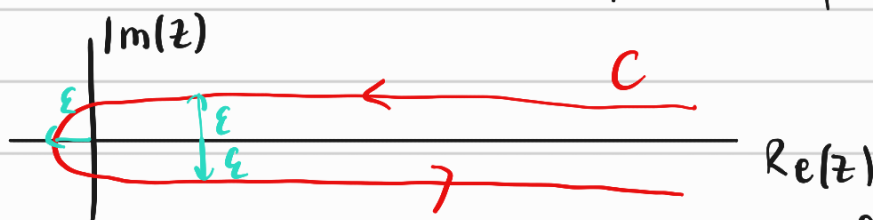
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

Una expresión alternativa y que extiende la definición de la función a casi todo el plano complejo es la sgte:

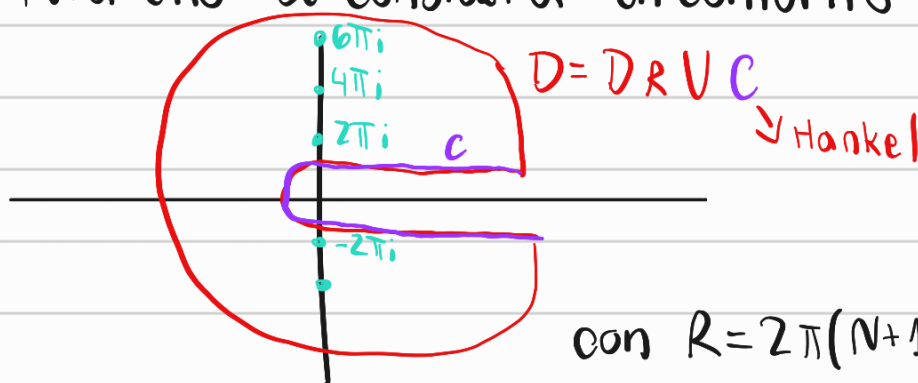
función gamma
↗ extensión
de los factoriales

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Donde C es el contorno de Hanke dado por:



En particular queremos evaluar la integral $\int_C f(z) dz$ donde $f(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$. Para ello se considera un contorno D



$$\text{con } R = 2\pi(N+1), N \in \mathbb{N}$$

De esta manera

$$\oint_D f(z) dz = \int_{D_R} f(z) dz + \int_c f(z) dz$$

0

Y en virtud del teo de los residuos

$$\int_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz = \sum_n \operatorname{Res}(f(z), z_n)$$

polos encerrados
por contorno D

Por lo que sólo hace falta encontrar los residuos de $f(z) = \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$.
Para ello vemos denominador = 0:

$$e^z - 1 = 0 \Rightarrow z_n = 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$$

↑
polos de f(z)

Calculemos sus residuos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_n) &= \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \cancel{(z - z_n)}^{\substack{z \rightarrow z_n \\ 0}} \frac{(-z)^{s-1}}{\cancel{e^z - 1}^{\substack{z \rightarrow z_n \\ 0}}} \text{ bien definido} \end{aligned}$$

$$= (-2\pi i)^{s-1} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)}{e^z - 1} = L$$

limite de la forma $\frac{0}{0}$
 $\Rightarrow$ L'Hopital

$$\begin{aligned} L &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{\frac{d}{dz}(z - z_n)}{\frac{d}{dz}(e^z - 1)} = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{1}{e^z} \\ &= \frac{1}{e^{2\pi i}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_n) = (-2\pi i)^{s-1}$$

Sumando todos los residuos:

$$I = 2\pi i \left[\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=1} (-2\pi i)^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2\pi i)^{s-1} \right] / z_n=0 \text{ no se encierra por } D$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} i^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} + (2\pi)^{s-1} (-i)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \right]$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-s} \left[\underbrace{i^{s-1}}_{e^{i\pi/2}} + \underbrace{(-i)^{s-1}}_{e^{-i\pi/2}} \right] \right]$$

$$= 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \left[e^{i\pi/2(s-1)} + e^{-i\pi/2(s-1)} \right]$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Recordar que
 $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Reemplazando en la funcional de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \prod (1-s) (2\pi)^{s-1} \sum (1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Evaluando en $s = -1$:

$$\zeta(-1) = \underbrace{\prod (2)}_{(2-1)! = 1} (2\pi)^{-2} \sum (2) 2 \cos(-\pi)$$

$$(2-1)! = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{problema de Basilea, resultado conocido})$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} 2$$

$$= - \frac{1}{12}$$