Auxiliar 9

Fórmula de Cauchy y Teorema de Residuos

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Identifique las singularidades de las siguientes funciones complejas y clasifíquelas (singularidad removible, polo simple, polo de orden n o singularidad esencial):

a) $\tan(z)$

b) $\frac{z^2}{1+z^4}$

c) $\frac{1}{1+z+z^2}$

d) $e^{1/z}$

Pregunta 2

a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y Γ como la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada positivamente y sea $a \in \mathbb{C}$, tal que $|a| > 1$. Supongamos que f es una función holomorfa (regular) en el disco D y que cumple la igualdad

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = 0.$$

Calcule el valor de $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

b) Calcule la integral:

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Pregunta 3

Sea

$$f(z) = \frac{e^{2z}\sin(z)}{z^3(z+i)}$$

Determine sus ceros y polos (con sus órdenes) f. Además calcule

$$I = \oint_\gamma f(z)dz$$

donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| = r \geq 0\}$

Pregunta 4 (extra)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

Este es un resultado absurdo, pero que no obstante tiene una razón de ser. Para eso, vamos a revisar la función Zeta de Riemann, que se define preliminarmente por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde $s \in \mathbb{C}$ (vamos a usar s para la variable de la función porque después tendremos un z que se usará para integrar).

Mediante una serie de pasos que pueden ver en el siguiente artículo es posible llegar a una expresión integral alternativa para la función Zeta de Riemann dada por:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz \tag{1}$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ (función gamma) y C es un contorno (llamado contorno de Hankel) el cual desde el infinito pasa por abajo del eje real, a una distancia ϵ positiva que se hará muy pequeña, luego da una media vuelta rodeando el origen en un semicírculo de radio ϵ, para finalmente ir hasta infinito a una distancia ϵ sobre el eje real.

Para evaluar la integral, definimos un nuevo contorno D, el cual se puede ver en la Figura 1, donde el radio grande es $R = (2N+1)\pi$, con N entero y grande.

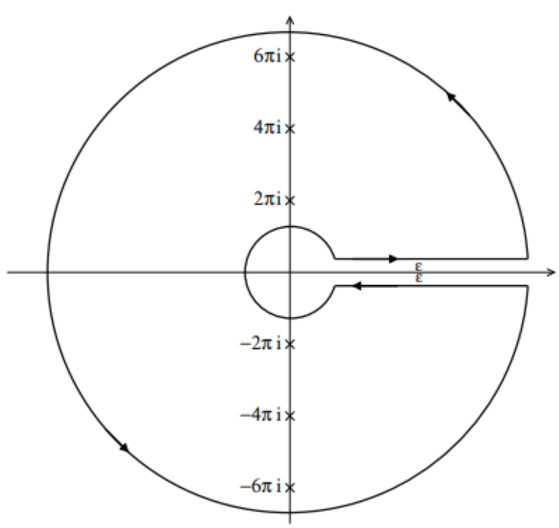

Figura 1: Contorno D.

Notamos que D se conforma por la unión entre el circulo grande y el contorno C. De esta manera, también se puede demostrar que la integral asociada al circulo grande se va a 0 cuando $R \to \infty$, por lo tanto

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz = \oint_D \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz$$

Teniendo ahora sí una expresión para calcular la integral en un camino cerrado. Evalúe la integral en D con residuos y utilizando la ecuación (1) y el siguiente resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

concluya que $\zeta(-1) = -1/12$.

Noten que hemos demostrado que la función Zeta, extendida analíticamente al plano complejo evaluada en -1 vale $-1/12$. Esta función Zeta se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ solo para $\text{Re}(s) > 1$, por lo que no hemos demostrado que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$, lo cual ya sabíamos que era falso. Sin embargo, en algunos contextos físicos esto se utiliza (efecto Casimir).

Integración compleja

Fórmula de Cauchy: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega - \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces para todo $z \in D(z_0, r)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

Singularidad: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.

Singularidad aislada: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y existe un radio $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(p, R) \setminus \{p\}$.

Singularidad evitable: $p \in \mathbb{C}$ se dice singularidad evitable si es singularidad aislada y $L_0(p) = \lim_{z \to p} f(z)$ existe.

Polo: $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y existe $m \geq 1$ entero tal que $L_m(p) = \lim_{z \to p} (z - p)^m f(z)$ existe y no es igual a 0. Al menor m que cumpla esto le llamamos el orden de p. En particular, p es polo simple si es polo de orden $m = 1$.

Residuo: Definimos para p un polo de orden m, su residuo como

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - p)^m f(z)\right)$$

que corresponde al coeficiente c_{m-1} de la serie de Laurent de f en torno a p.

Teorema de los Residuos: Sea f una función meromorfa en Ω y P sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y más aún

$$\oint_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}(f, p_j)$$