Auxiliar 6

Preparación C1

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sea Γ la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $z = \sqrt{3}y$, recorrida de tal modo que observando el plano xy desde el eje z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj. Calcule

$$\int_\Gamma (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

Pregunta 2

Sea Γ una curva simple, regular por trozos contenida en el plano XY. Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares vía la relación $r = f(\theta)$, es decir:

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \quad \theta \in [a, b] \subset [0, 2\pi)$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es clase C^1 y 2π-periódica. Sea D la región encerrada por Γ y las rectas $y = m_a x$ e $y = m_b x$, que unen los extremos de Γ con el origen y cuyas pendientes son las asociadas a los ángulos a y b. Pruebe que

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

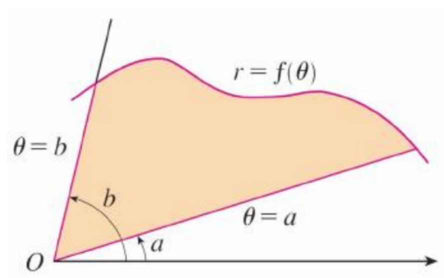

Figura 1: Esquema de la situación.

Pregunta 3

Para una distribución estacionaria de carga y una distribución de corriente libre de divergencia, los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{H}(x, y, z)$, respectivamente, satisfacen

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

La radiación que los campos producen a través de una superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad de flujo de radiación, llamado el campo vectorial de Poynting

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

(a) Si S es una superficie cerrada, demuestre que el flujo de radiación, el flujo de $\mathbf{P}$ a través de S, está dado por

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot dS = -\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dV,$$

donde V es la región encerrada por S.

(b) Un ejemplo de tales campos son:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (0, z, y) \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(x, y, z) = (-xy, x, yz).$$

En este caso, calcule los campos: $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ y $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$.

(c) Encuentre el flujo del vector de Poynting a través de la esfera unitaria centrada en el origen. Ayuda: En coordenadas esféricas, las coordenadas (r, θ, ϕ) están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) de la siguiente manera:

$$x = r \sin\phi \cos\theta, \quad y = r \sin\phi \sin\theta, \quad z = r \cos\phi,$$

$\hat{r}(r, \theta, \phi) = r(\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi)$.