

Auxiliar 5

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

De acuerdo a la teoría de Yukawa, el potencial generado en una interacción protón-neutrón está dado por

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r}$$

en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $g, \alpha > 0$. Utilizando el hecho que $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$, en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera es una superficie regular y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi g^2 - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Donde $\mathbf{F} = -\nabla U = -g^2 \left(\frac{\alpha m}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\alpha mr} \hat{\mathbf{r}}$.

Solución: Para demostrar la identidad propuesta, utilizaremos el teorema de la divergencia. Sin embargo, la aplicación directa sobre el campo $\mathbf{F}$ no es posible, ya que el campo no es C^1 en Ω (región que encierra al origen). Para resolver este problema, consideraremos otro dominio Ω' que contenga a Ω y que no incluya al origen. Luego, aplicaremos el teorema de la divergencia sobre Ω' y finalmente haremos tender el volumen de Ω' al volumen de Ω . La forma más sencilla de hacer esto es definir Ω' como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ tales que $r \geq \epsilon$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. De esta forma, Ω' es un conjunto acotado que no contiene al origen y $\Omega' \subset \Omega$. Además, la frontera de Ω' es una superficie regular y orientada según la normal exterior, donde $\partial\Omega'$ es la unión de $\partial\Omega$ y la bola de radio ϵ centrada en el origen. Considerando esto, aplicando el teorema de la divergencia para este dominio se tiene que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega'} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_{\partial\Omega'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega'} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = -\alpha^2 m^2 U$ se tiene que

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_{\Omega'} \alpha^2 m^2 U \, dV - \iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Calculemos $\iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ aparte por definición. Algo importante a mencionar es que la normal exterior a la bola de radio ϵ es $-\hat{\mathbf{r}}$, ello debido a lo exterior al volumen apunta justamente en esta dirección. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\partial B_\epsilon} g^2 \left(\frac{\alpha m}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) e^{-\alpha m \epsilon} \hat{\mathbf{r}} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}) \epsilon^2 d\Omega \\ &= g^2 \left(\frac{\alpha m}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) e^{-\alpha m \epsilon} \epsilon^2 \underbrace{\iint_{\partial B_\epsilon} d\Omega}_{4\pi} \\ &= 4\pi g^2 (\alpha m \epsilon + 1) e^{-\alpha m \epsilon} \end{aligned}$$

Tendiendo $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\alpha m \epsilon + 1 \rightarrow 1$ y $e^{-\alpha m \epsilon} \rightarrow 1$, por lo que

$$\iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g^2$$

Y reemplazando en la igualdad inicial

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iiint_{\Omega'} \alpha^2 m^2 U \, dV - 4\pi g^2 \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega'} \alpha^2 m^2 U \, dV - 4\pi g^2 \\ &= - \iiint_{\Omega} \alpha^2 m^2 U \, dV - 4\pi g^2 \end{aligned}$$

Demostrando lo pedido.

Pregunta 2

Calcule $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$ siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x^2 + yz, -3xyz)$ y S la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda en el primer octante ($x, y, z \geq 0$) y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal exterior al volumen sólido acotado entre el primer octante y el cono.

Solución: Para calcular la integral pedida haremos uso del teorema de Stokes. Su aplicación es directa pues el campo es C^1 en todo el dominio de interés. En virtud del teorema se cumple que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

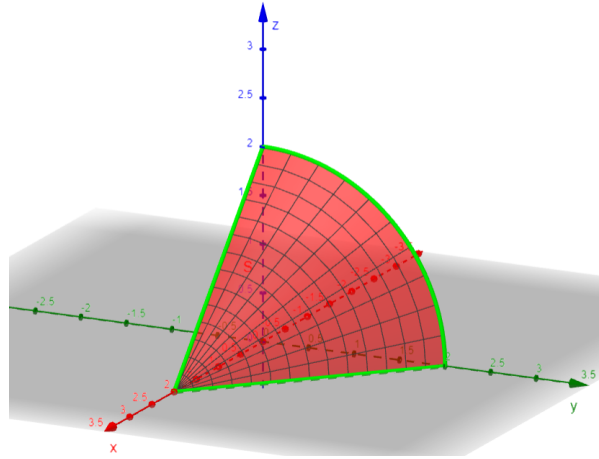


Figura 1: Cono y frontera de la superficie S

Por lo que la integral de flujo a calcular pasa a ser una integral de línea sobre la frontera de la superficie S . La frontera de S es la unión de las rectas que unen los puntos $(0,0,2)$ y $(2,0,0)$, $(2,0,0)$ y $(0,2,0)$ y el arco de circunferencia $y^2 + z^2 = 4$ (ver figura 1). Por lo tanto, la integral de línea se descompone en tres partes:

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,2) \rightarrow (2,0,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(2,0,0) \rightarrow (0,2,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{arco}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Parametrizando por separado cada una de estas curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 2 - t) \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (2 - t, t, 0) \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\mathbf{r}_3(t) = (0, 2 \cos(t), 2 \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Derivando cada una de estas parametrizaciones se obtiene

$$\mathbf{r}'_1(t) = (1, 0, -1)$$

$$\mathbf{r}'_2(t) = (-1, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}'_3(t) = (0, -2 \sin(t), 2 \cos(t))$$

Y el campo $\mathbf{F}$ evaluado en cada una de estas parametrizaciones es

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) = (t - (2 - t), t^2, 0) = (2t - t^2, t^2, 0)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) = (2 - t - (0), (2 - t)^2 + t(0), 0) = (2 - t, (2 - t)^2, 0)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_3(t)) = (0 - (2 \sin(t)), 0^2 + 2 \cos(t) 2 \sin(t), -3(0)(2 \cos(t) 2 \sin(t))) = (-2 \sin(t), 4 \cos(t) \sin(t), 0)$$

Por lo que las integrales de línea son

$$\int_{(0,0,2) \rightarrow (2,0,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (2t - t, t^2, 0) \cdot (1, 0, -1) dt = \int_0^2 (2t - t) dt = 2$$

$$\int_{(2,0,0) \rightarrow (0,2,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (2 - t, (2 - t)^2, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt = \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{\text{arco}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2 \sin(t), 4 \cos(t) \sin(t), 0) \cdot (0, -2 \sin(t), 2 \cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin(t) \cos(t) dt = 4$$

Sigue que el flujo original sobre el rotor de $\mathbf{F}$ es

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 2 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{10}{3}$$

Pregunta 3

Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla^2 f = 0$ sobre el disco centrado en el origen de radio $r > 0$. Demuestre que $f(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$ mediante los siguientes pasos:

- Primero: Considere Γ_r la circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y definiendo $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Verifique que $r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, donde $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
- Segundo: Use lo obtenido en el paso anterior para asegurar que φ es constante, y estudie $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r)$ para concluir el resultado.

Solución:

- Primero, utilizamos la regla de la cadena para obtener la derivada de $\varphi(r)$. Sabemos que:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

Derivando con respecto a r , usando la regla de Leibniz y teniendo en cuenta que f depende de $r \cos \theta$ y $r \sin \theta$, obtenemos:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) d\theta$$

Notamos que el término dentro de la integral corresponde al campo vectorial F , donde $F = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$. De esta manera, podemos reescribir $\varphi'(r)$ de forma más compacta:

$$r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) d\theta$$

Esta expresión puede ser interpretada como una integral de línea a lo largo de la circunferencia Γ_r de radio r . Es decir:

$$r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} F \cdot d\mathbf{x}$$

- b) Ahora, aplicamos el Teorema de Green para convertir esta integral de línea en una integral doble. Según el Teorema de Green, para un campo vectorial $F = (P, Q)$, donde $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$, tenemos:

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\mathbf{x} = \int_{D_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Como $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$, se sigue que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Dado que f satisface la ecuación de Laplace, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en el disco D_r , concluimos que:

$$r\varphi'(r) = \int_{D_r} 0 dx dy = 0$$

Por lo tanto, $r\varphi'(r) = 0$, lo que implica que $\varphi'(r) = 0$ para $r > 0$. Esto nos dice que $\varphi(r)$ es constante para $r > 0$.

Finalmente, calculamos el límite de $\varphi(r)$ cuando $r \rightarrow 0^+$. Sabemos que $\varphi(r)$ es constante para $r > 0$, por lo que podemos evaluar este límite tomando $r = 0$. Usamos la definición original de $\varphi(r)$:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0) d\theta = f(0, 0)$$

De este modo, concluimos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = f(0, 0)$$

Por lo tanto, se ha obtenido el resultado solicitado: $\varphi(r) = f(0, 0)$.