Auxiliar 5

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

De acuerdo a la teoría de Yukawa, el potencial generado en una interacción protón-neutrón está dado por

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r}$$

en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $g, \alpha > 0$. Utilizando el hecho que $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$, en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera es una superficie regular y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi g^2 - \alpha^2 m^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Donde $\mathbf{F} = -\nabla U = -g^2 \left(\frac{\alpha m}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{-\alpha m r}\, \hat{\mathbf{r}}$.

Pregunta 2

Calcule $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, x^2 + yz, -3xyz)$ y S la superficie del cono $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ que queda en el primer octante $(x, y, z \geq 0)$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal exterior al volumen sólido acotado entre el primer octante y el cono.

Pregunta 3

Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla^2 f = 0$ sobre el disco centrado en el origen de radio $r > 0$. Demuestre que $f(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, d\theta$ mediante los siguientes pasos:

a) Primero: Considere Γ_r la circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y definiendo $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$. Verifique que $r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, donde $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

b) Segundo: Use lo obtenido en el paso anterior para asegurar que φ es constante, y estudie $\lim_{r \to 0^+} \varphi(r)$ para concluir el resultado.

Coordenadas ortogonales

Sistema de coordenadas curvilíneas: Sea $\mathbf{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable e invertible tal que a cada $(u, v, w) \in D$ le corresponde un punto $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3$.

Sistema ortogonal: Sea $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se dice que $\mathbf{R}$ es ortogonal si los vectores

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w},$$

son mutuamente ortogonales.

Factores escalares:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} \right\|.$$

Representación de un campo vectorial en otro sistema: Sea $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, Ω abierto y $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se define:

$$F_u = F_u(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{u}}(u, v, w),$$

$$F_v = F_v(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{v}}(u, v, w),$$

$$F_w = F_w(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{w}}(u, v, w).$$

Se tiene que $\mathbf{F} = F_u \cdot \hat{\mathbf{u}} + F_v \cdot \hat{\mathbf{v}} + F_w \cdot \hat{\mathbf{w}}$.

Algunos sistemas de coordenadas

- Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{R}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)$.
- Coordenadas esféricas: $\mathbf{R}(r, \theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales:

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)$$

- Rotor:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$$

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

Teoremas fundamentales

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\, d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du\, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du\, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema de la divergencia (o Gauss): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega_0 \supseteq \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\; dV \tag{2}$$

donde para una parametrización $\mathbf{R}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ del volumen

$$dV = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Para un sistema ortonormal con factores escalares conocidos, el diferencial se calcula como $dV = h_u h_v h_w\; du\; dv\; dw$