Auxiliar 4

Teorema de la divergencia

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sean

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y(x^2+y^2)^{3/2}, -x(x^2+y^2)^{3/2}, z+1\right)$$

y S la frontera de la región sólida acotada superiormente por el plano $z = 2x$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcular

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Pregunta 2

Sea S la porción de paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitado por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho,\theta,z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1+4\rho^2}}$$

b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo.

c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia en este dominio? Justifique su respuesta.

d) Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$

Pregunta 3

a) Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío y $g : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar C^2. Muestre que

$$\operatorname{div}(g\nabla g) = g\Delta g + \|\nabla g\|^2 \quad \text{en } \mathbb{A}$$

b) Considere el campo escalar h definido por $h(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Explique brevemente por qué es C^2 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

c) Exprese h y ∇h en coordenadas esféricas.
Indicación: Recuerde que el operador ∇ en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

d) Muestre que la derivada direccional $\frac{\partial h}{\partial \hat{r}}$ se anula en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.
Indicación: Para un campo escalar f se tiene la igualdad $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \nabla f \cdot \hat{u}$, en el dominio en el que f es C^1, y para $\hat{u}$ vector unitario.

e) Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Calcule

$$\iiint_\Omega h\Delta h dV$$

Coordenadas ortogonales

Sistema de coordenadas curvilíneas: Sea $\mathbf{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable e invertible tal que a cada $(u, v, w) \in D$ le corresponde un punto $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3$.

Sistema ortogonal: Sea $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se dice que $\mathbf{R}$ es ortogonal si los vectores

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w},$$

son mutuamente ortogonales.

Factores escalares:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} \right\|.$$

Representación de un campo vectorial en otro sistema: Sea $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, Ω abierto y $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se define:

$$F_u = F_u(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{u}}(u, v, w),$$

$$F_v = F_v(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{v}}(u, v, w),$$

$$F_w = F_w(u, v, w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\mathbf{w}}(u, v, w).$$

Se tiene que $\mathbf{F} = F_u \cdot \hat{\mathbf{u}} + F_v \cdot \hat{\mathbf{v}} + F_w \cdot \hat{\mathbf{w}}$.

Algunos sistemas de coordenadas

- Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{R}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)$.
- Coordenadas esféricas: $\mathbf{R}(r, \theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales:

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)$$

- Rotor:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$$

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

Teoremas fundamentales

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \, d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du \, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Campos conservativos: Sea $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ un campo vectorial continuo sobre un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^3$. Entonces, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(i) El campo $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω.

(ii) Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(iii) El campo $\mathbf{F}$ se puede representar como el gradiente de una función escalar, es decir, existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Proposición importante: Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1. Supongamos que Ω es estrellado. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \iff \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \Omega.$$