

Auxiliar 3

Coordenadas curvilíneas, integrales de flujo y teorema de Stokes

Profesor: Ricardo Carlos Freire
 Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

De acuerdo a la teoría de Yukawa, el potencial generado en una interacción protón-neutrón está dado por

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r}$$

en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $g, \alpha > 0$.

- Encuentre la fuerza asociada para $r \neq 0$. (**Hint:** $\mathbf{F} = -\nabla U$).
- Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio R centrado en el origen, orientado según la normal exterior.
- Pruebe que $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$, en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Solución:

- Para encontrar la fuerza asociada, primero es necesario expresar el gradiente de U en coordenadas esféricas. Para ello, recordemos la formula del gradiente en coordenadas curvilíneas:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

donde h_u, h_v, h_w son los factores de escala asociados a las coordenadas u, v, w . En el caso de coordenadas esféricas, estos factores de escala son $h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta$. Por lo tanto, el gradiente de U en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned} -\nabla U &= -g^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\alpha mr}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \right) \\ &= g^2 \left(-\alpha m \frac{e^{-\alpha mr}}{r} - \frac{e^{-\alpha mr}}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &= -g^2 \left(\frac{\alpha m}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\alpha mr} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

- El flujo de $\mathbf{F}$ a través de una superficie S es

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Dado que estamos en coordenadas esféricas (sistema ortonormal con factores de escala conocidos), el diferencial de área para radio R fijo es conocido e igual a $d=R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (F_r \hat{\mathbf{r}}) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -g^2 \left(\frac{\alpha m}{R} + \frac{1}{R^2} \right) e^{-\alpha m R} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad / \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1 \\ &= -g^2 \left(\frac{\alpha m}{R} + \frac{1}{R^2} \right) R^2 e^{-\alpha m R} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{=4\pi} \\ &= -4\pi g^2 (1 + \alpha m R) e^{-\alpha m R}\end{aligned}$$

c) Para probar que $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$, primero notamos que $\nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U)$. Por lo tanto, es necesario calcular la divergencia de $-\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas. Dado que $\mathbf{F}$ es radial ($F_\theta = 0$ y $F_\phi = 0$), la divergencia de $\mathbf{F}$ es (ver resumen y reemplazar factores de escala):

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \frac{\partial}{\partial r} (F_r h_r h_\theta h_\phi) \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \left(-g^2 \left(\frac{\alpha m}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\alpha m r} \right) \right) \quad / h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta \\ &= \frac{g^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-\alpha m r + 1) e^{-\alpha m r} \\ &= \frac{g^2}{r^2} (-\alpha m + \alpha m - \alpha^2 m^2 r) e^{-\alpha m r} \\ &= \alpha^2 m^2 \underbrace{\left(-\frac{g^2}{r} e^{-\alpha m r} \right)}_{=U} \\ &= \alpha^2 m^2 U \quad \forall r \neq 0\end{aligned}$$

Pregunta 2

Considere el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 y - 3z + e^x \sin z) \hat{i} + x^2 \hat{j} + (e^x \cos z - 3x) \hat{k}$$

a) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Considere la curva Γ definida por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) = \hat{\rho} + \cos(t) \hat{k}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en la curva Γ cuando se recorre positivamente.

Solución:

a) Calculamos el rotor de $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - 3z + e^x \sin z & x^2 & e^x \cos z - 3x \end{vmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos z - 3x) - \frac{\partial}{\partial z}x^2 \\ \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - 3z + e^x \sin z) - \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos z - 3x) \\ \frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - 3z + e^x \sin z) \end{pmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \cancel{-3} + \cancel{e^x \cos z} + \cancel{-e^x \cos z} + \cancel{3} \\ 2x - 3x^2 \end{pmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 3x^2 \end{pmatrix}^T
 \end{aligned}$$

b) Para calcular el trabajo de $\mathbf{F}$ sobre Γ , consideramos la definición de trabajo:

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

No obstante debido a la complejidad del campo $\mathbf{F}$ i.e. difícil de evaluar en $\mathbf{r}(t)$, es más conveniente utilizar teorema de Stokes (siempre que les pidan calcular antes un rotor deben sospechar la aplicación de este teorema). Dado que $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2x - 3x^2)$, el teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Analicemos Γ para identificar que superficie S encierra y parametrizarla. Primero observamos que en la coordenada x e y tenemos la clásica parametrización de polares por lo que los parametros a utilizar serán ρ y ϕ . Por otro lado, la curva Γ se encuentra en el plano $z = x = \cos t$. Por lo tanto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x = z\}$. Y su parametrización es

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho \cos \phi) \quad \rho \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

El diferencial de área vectorial por otro lado se calcula como

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\rho d\phi$$

Importante notar que el signo de la normal se determina por la regla de la mano derecha. Intentemos esbozar la superficie S para visualizar la normal y determinar el signo:

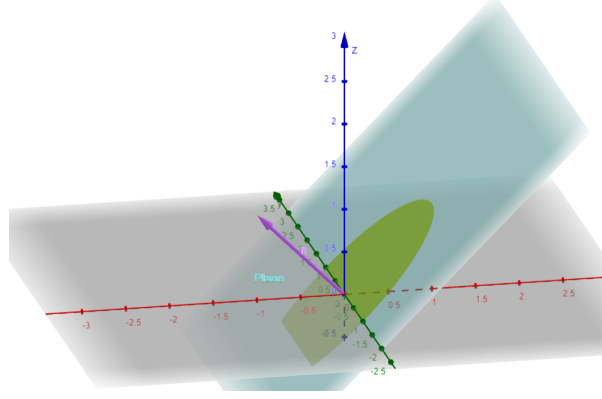


Figura 1: Superficie S con su normal que sigue la regla de la mano derecha.

Notamos que la normal apunta hacia arriba si la curva se orienta antihorario (regla de la mano derecha), por lo que la componente z de la normal exterior debiese ser positiva también. Veamos si esto se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \phi & \sin \phi & \cos \phi \\ -\rho \sin \phi & \rho \cos \phi & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\rho \sin^2 \phi - \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho \cos \phi \cos \phi + \rho \sin \phi \sin \phi \\ \rho \sin^2 \phi + \rho \cos^2 \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\rho \\ \rho \sin(2\phi) \\ \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\rho > 0$, la componente z de la normal calculada efectivamente es positiva, y entonces el orden de las derivadas (que fue una elección arbitraria) dispuesto inicialmente se condice con la normal que sigue la regla de la mano derecha. Por lo tanto, la integral de flujo del rotor de $\mathbf{F}$ a través de S es

$$\begin{aligned} W &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0, 0, 2x - 3x^2)|_{x=\rho \cos \phi} \cdot (-\rho, \rho \sin(2\phi), \rho) \, d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3\rho^2 \cos^2 \phi + 2\rho \cos \phi) \rho \, d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3\rho^3 \cos^2 \phi + 2\rho^2 \cos \phi) \, d\rho d\phi \\ &= 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi}_{=0} \int_0^1 \rho^2 \, d\rho - 3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi}_{=\pi} \underbrace{\int_0^1 \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Pregunta 3

Considere la función

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

- a) Escriba la función f en coordenadas esféricas.
- b) Calcule el laplaciano de f en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
- c) Determine el campo $\mathbf{E} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface $\mathbf{E} = -\nabla f$. Luego calcule explícitamente

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C es la circunferencia descrita por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, con $z = 0$ y $a > 0$, recorrida antihorario. ¿Es $\mathbf{E}$ conservativo en Ω ? ¿Qué puede decir de la validez del teorema de Stokes para este caso?

- d) Calcule la integral de flujo de $\mathbf{E}$ a través de la esfera de radio R centrada en el origen, orientada según la normal exterior.

Solución:

- a) Para escribir f en coordenadas esféricas, primero recordamos la relación entre coordenadas cartesianas y esféricas:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Por lo tanto, f en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned}f(r, \theta, \phi) &= \frac{\alpha r \cos \theta}{r^3} \\&= \frac{\alpha \cos \theta}{r^2}\end{aligned}$$

- b) Para calcular el laplaciano de f en coordenadas esféricas recordamos que $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Por lo tanto, primero calculamos el gradiente de f en coordenadas esféricas (también se puede hacer con formula de laplaciano que en controles generalmente dan, no obstante debido a que en las preguntas que vienen preguntan por $\mathbf{E}$ es más conveniente hacerlo de esta forma):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\&= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\&= -2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} - \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Calculamos ahora la divergencia de ∇f en coordenadas esféricas (f no depende de ϕ por lo que $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$)

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Calculamos por partes los términos de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= -2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \Rightarrow r^2 \frac{\partial f}{\partial r} = -2\alpha \frac{\cos \theta}{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) = 2\alpha \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \Rightarrow \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = \alpha \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) = \alpha \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de $\nabla^2 f$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\alpha \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(2\alpha \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{2\alpha \cos \theta}{r^2} + \frac{2\alpha \cos \theta}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

c) Como ya calculamos ∇f , el campo $\mathbf{E}$ que satisface $\mathbf{E} = -\nabla f$ es

$$\mathbf{E} = 2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Para calcular la integral de $\mathbf{E}$ sobre C , primero parametrizamos C en coordenadas esféricas (ya que el campo está en coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\phi) &= a \hat{\mathbf{r}} \\ \Rightarrow \mathbf{r}'(\phi) &= a \frac{d}{d\phi} (\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Ahora recordamos que $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ y por lo tanto derivado con respecto a ϕ y evaluando $\theta = \pi/2$ (ya que estamos en el plano $z = 0$) obtenemos:

$$\mathbf{r}'(\phi) = a(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

Y como $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, entonces $\mathbf{r}'(\phi) = a \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Por lo tanto, la integral de $\mathbf{E}$ sobre C

es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot a \hat{\boldsymbol{\phi}} d\phi \\ &= 0 \quad / \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0, \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0\end{aligned}$$

Respecto a la conservatividad de $\mathbf{E}$, como $\mathbf{E} = -\nabla f$ en Ω y la curva C no pasa por el origen, entonces $\mathbf{E}$ es conservativo en Ω (caracterización de campos conservativos). Por otro lado, el teorema de Stokes no se puede aplicar en este caso ya que la curva C encierra el origen, punto en el cual $\mathbf{E}$ no es clase C^1 .

- d) Para calcular la integral de flujo de $\mathbf{E}$ a través de la esfera de radio R centrada en el origen, orientada según la normal exterior, recordamos definición de flujo:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Dado que $\mathbf{E}$ es radial, la normal a la esfera es $\hat{\mathbf{r}}$ y por lo tanto $d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2\alpha \frac{\cos \theta}{R} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2\alpha \frac{\cos \theta}{R} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 0 \quad / \cos \theta \sin \theta \text{ es impar en } [0, \pi]\end{aligned}$$

Pregunta 4

Consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}}$$

que es de clase C^∞ en el abierto conexo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje Z}$. Este campo es irrotacional en todo $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje Z}$.

- Demuestre que el campo $\mathbf{F}$ es irrotacional en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje Z}$, es decir, que $\nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$.
- ¿Se puede concluir que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje Z}$? Justifique su respuesta considerando la definición de un campo conservativo.
- Considere la circunferencia $C(a)$ de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido antihorario. Calcule la integral de línea $\oint_{C(a)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y discuta su significado en relación con la conservatividad del campo.
- Explique por qué no es posible aplicar el teorema de Stokes a la integral de línea calculada en el ítem (c) en el contexto del dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje Z}$.

- e) Bajo qué condiciones sobre la curva cerrada Γ y la superficie S se puede aplicar el teorema de Stokes para un campo vectorial en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$? Describa las implicaciones para la conservatividad de $\mathbf{F}$ en tales casos.
- f) Basándose en los resultados anteriores, discuta la relación entre la irrotacionalidad de un campo vectorial y su conservatividad en un dominio específico. ¿Es la condición de ser irrotacional suficiente para que un campo sea conservativo en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Eje } Z$?

Solución: Ver Ejemplo 3.4.3 del [apunte](#).