Auxiliar 3

Coordenadas curvilíneas, integrales de flujo y teorema de Stokes

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

De acuerdo a la teoría de Yukawa, el potencial generado en una interacción protón-neutrón está dado por

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r}$$

en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $g, \alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza asociada para $r \neq 0$. (**Hint:** $\mathbf{F} = -\nabla U$).

b) Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio R centrado en el origen, orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\nabla^2 U = \alpha^2 m^2 U$, en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Pregunta 2

Considere el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 y - 3z + e^x \sin z)\ \hat{\imath} + x^2\ \hat{\jmath} + (e^x \cos z - 3x)\ \hat{k}$$

a) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Considere la curva Γ definida por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) = \hat{\rho} + \cos(t)\ \hat{k}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en la curva Γ cuando se recorre positivamente.

Pregunta 3

Considere la función

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

a) Escriba la función f en coordenadas esféricas.

b) Calcule el laplaciano de f en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

c) Determine el campo $\mathbf{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ que satisface $\mathbf{E} = -\nabla f$. Luego calcule explícitamente

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C es la circunferencia descrita por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, con $z = 0$ y $a > 0$, recorrida antihorario. ¿Es $\mathbf{E}$ conservativo en Ω? ¿Qué puede decir de la validez del teorema de Stokes para este caso?

d) Calcule la integral de flujo de $\mathbf{E}$ a través de la esfera de radio R centrada en el origen, orientada según la normal exterior.

Pregunta 4

Consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{j}}$$

que es de clase C^∞ en el abierto conexo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z. Este campo es irrotacional en todo $\mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z.

a) Demuestre que el campo $\mathbf{F}$ es irrotacional en $\mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z, es decir, que $\nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$.

b) ¿Se puede concluir que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo en todo $\mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z? Justifique su respuesta considerando la definición de un campo conservativo.

c) Considere la circunferencia $C(a)$ de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido antihorario. Calcule la integral de línea $\oint_{C(a)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y discuta su significado en relación con la conservatividad del campo.

d) Explique por qué no es posible aplicar el teorema de Stokes a la integral de línea calculada en el ítem (c) en el contexto del dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z.

e) Bajo qué condiciones sobre la curva cerrada Γ y la superficie S se puede aplicar el teorema de Stokes para un campo vectorial en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z? Describa las implicaciones para la conservatividad de $\mathbf{F}$ en tales casos.

f) Basándose en los resultados anteriores, discuta la relación entre la irrotacionalidad de un campo vectorial y su conservatividad en un dominio específico. ¿Es la condición de ser irrotacional suficiente para que un campo sea conservativo en el dominio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ Eje Z?

Coordenadas ortogonales

Sistema de coordenadas curvilíneas: Sea $\mathbf{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable e invertible tal que a cada $(u,v,w) \in D$ le corresponde un punto $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in \mathbb{R}^3$.

Sistema ortogonal: Sea $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se dice que $\mathbf{R}$ es ortogonal si los vectores

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w},$$

son mutuamente ortogonales.

Factores escalares:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} \right\|.$$

Representación de un campo vectorial en otro sistema: Sea $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, Ω abierto y $\mathbf{R}$ un sistema de coordenadas. Se define:

$$F_u = F_u(u,v,w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u,v,w)) \cdot \hat{\mathbf{u}}(u,v,w),$$

$$F_v = F_v(u,v,w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u,v,w)) \cdot \hat{\mathbf{v}}(u,v,w),$$

$$F_w = F_w(u,v,w) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(u,v,w)) \cdot \hat{\mathbf{w}}(u,v,w).$$

Se tiene que $\mathbf{F} = F_u \cdot \hat{\mathbf{u}} + F_v \cdot \hat{\mathbf{v}} + F_w \cdot \hat{\mathbf{w}}$.

Algunos sistemas de coordenadas

- Coordenadas cilíndricas: $\mathbf{R}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z)$.
- Coordenadas esféricas: $\mathbf{R}(r, \theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r\cos\theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales:

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)$$

- Rotor:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$$

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$$

Teoremas fundamentales

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\, d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du\, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du\, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Campos conservativos: Sea $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ un campo vectorial continuo sobre un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^3$. Entonces, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(i) El campo $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω.

(ii) Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

(iii) El campo $\mathbf{F}$ se puede representar como el gradiente de una función escalar, es decir, existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Proposición importante: Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1. Supongamos que Ω es estrellado. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \iff \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \Omega.$$