Auxiliar 2

Integrales de línea, superficie y Teorema de Green

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto sobre la hélice parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ sometido a la fuerza

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \quad , \text{donde } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

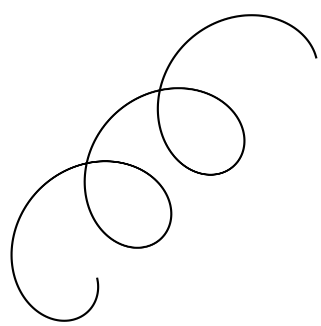

Figura 1: Hélice parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Pregunta 2

Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$, calcule:

$$I = \iint_S \frac{x^2}{z} dA$$

Pregunta 3

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

Dada una curva $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se define la integral de circulación como:

$$B(C) = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a) Bosqueje las siguientes curvas y calcule $B(C)$ para los siguientes casos:

1) C_1 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el origen, y cuyo sentido de recorrido es horario.

2) C_2 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el punto $x = 2$ e $y = 2$, y cuyo sentido de recorrido es antihorario.

3) C_3 es la frontera del triángulo cuyos vértices son $A_1 : \{x = 0, y = 3\}$, $A_2 : \{x = -4, y = -2\}$ y $A_3 : \{x = 4, y = -2\}$, recorrida dos veces en sentido antihorario.

b) Considere la curva D mostrada en la figura adjunta. Pruebe que existe una función escalar $g : \text{Int}(D) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$ en $\text{Int}(D)$. Entregue una expresión para la función escalar y deduzca el valor de $B(C)$ para toda curva $C \subset \text{Int}(D)$.

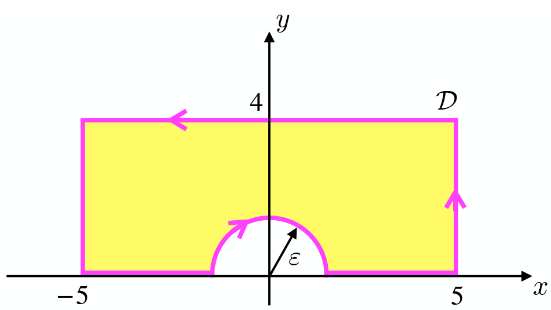

Figura 2: Esquema Pregunta 3(b).El radio $\epsilon \ll 1$, i.e., es muy pequeño.

c) ¿Existen diferencias entre las circulaciones calculadas en (a) y (b)? En caso de existir esas diferencias, ¿a qué se debe? En caso de no existir, ¿qué puede decirse sobre el campo $\mathbf{F}$? Justifique claramente su respuesta.

Pregunta extra

Una carga q se encuentra a una distancia d de un plano conductor infinito conectado a tierra. El conductor se encuentra en el plano XY ($z = 0$) mientras que la carga en $z = d$. El potencial solución del sistema descrito antes es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{r} - d\hat{z}\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{r} + d\hat{z}\|}$$

A partir de esto calcule la carga total inducida sobre la superficie del plano conductor.
Hint: Utilice la condición de borde para el campo eléctrico entre la interfaz de 2 medios $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n}|_{\text{borde}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, recordando que $\vec{E} = -\nabla V$, $\vec{E} = 0$ dentro de un conductor y que la carga total se puede calcular como $Q = \iint_S \sigma dA$

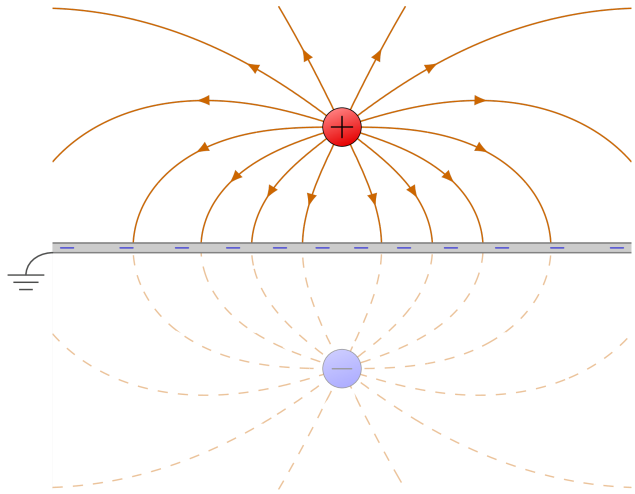

Figura 3: Sistema descrito en la pregunta extra.

Resumen

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\, d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v)\, du\, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du\, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\, dxdy$$

Teorema de la divergencia (o Gauss): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega_0 \supseteq \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV \tag{2}$$

Análogamente a Stokes, en 2D el teorema de la divergencia toma la siguiente forma:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{F}\ dS$$

lo cual para $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\oint_{\partial S} Pdx - Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(prácticamente igual a Green).