Auxiliar 1

Curvas, parametrizaciones y operadores diferenciales

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{f(\theta)\sqrt{a^2+1}}$$

Donde la curvatura se define como

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \quad \text{con} \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Solución:

a) Como $\rho = f(\theta)$, recordando que la parametrización en función del angulo para las coordenadas polares sigue la forma

$$\begin{aligned}\vec{r}(\theta) &= (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \\ &= (f(\theta)\cos(\theta) + f(\theta)\sin(\theta))\end{aligned}$$

Entonces la derivada de $\vec{r}$ con respecto a θ es:

$$\vec{r}'(\theta) = (f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta), f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))$$

Ocupando la definición de longitud de arco (ver formulario):

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\vec{r}\,'(\theta)\| \, d\theta \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))^2 + (f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))^2} \, d\theta \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} \, d\theta
\end{aligned}$$

Concluyendo el resultado.

b) Para el caso en que $f'(\theta) = af(\theta)$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{\left\|\vec{T}'(\theta)\right\|}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|}$$

Vemos que hay que derivar con respecto a θ la función $\vec{T}(\theta)$ (vector tangente, ver formulario), el cual se define como:

$$\vec{T}(\theta) = \frac{\vec{r}\,'(\theta)}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|}$$

Como estamos en coordenadas polares y $\rho = f(\theta)$, por lo que $\vec{r}\,'(\theta)$ es:

$$\vec{r}\,'(\theta) = (f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta), f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))$$

Entonces $\|\vec{r}\,'(\theta)\|$ es (aplicando que $f'(\theta) = af(\theta)$):

$$\begin{aligned}
\|\vec{r}\,'(\theta)\| &= \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} \\
&= \sqrt{(af(\theta))^2 + (f(\theta))^2} \\
&= (f(\theta))^2\sqrt{a^2+1}
\end{aligned}$$

Y $\vec{T}(\theta)$ es:

$$\begin{aligned}
\vec{T}(\theta) &= \frac{\cancel{f(\theta)}(a\cos(\theta) - \sin(\theta), a\sin(\theta) + \cos(\theta))}{\cancel{f(\theta)}\sqrt{a^2+1}} \\
&= \frac{(a\cos(\theta) - \sin(\theta), a\sin(\theta) + \cos(\theta))}{\sqrt{a^2+1}}
\end{aligned}$$

Sacando norma de $\vec{T}(\theta)$:

$$\begin{aligned}\left\|\vec{T}(\theta)\right\| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{(a\cos(\theta)-\sin(\theta))^2+(a\sin(\theta)+\cos(\theta))^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto volviendo a la definición de curvatura, considerando que $\left\|\vec{T}(\theta)\right\| = 1$ y que $\|\vec{r}\,'(\theta)\| = (f(\theta))^2\sqrt{a^2+1}$:

$$\begin{aligned}\kappa(\theta) &= \frac{\left\|\vec{T}'(\theta)\right\|}{\|\vec{r}\,'(\theta)\|} \\ &= \frac{1}{f(\theta)\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

Pregunta 2

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos vectoriales y escalares suaves, respectivamente. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

b) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$

c) $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

d) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Solución:

a) Por demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$. Considerando que ∇ se interpreta como el operador diferencial $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, entonces:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(fg) \\ &= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad \text{/ Regla de Leibniz o multiplicación} \\ &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= f\nabla g + g\nabla f\end{aligned}$$

b) Por demostrar que $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$. Sacando la divergencia de $f\vec{F}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f\vec{F}) &= \nabla \cdot (fF_1, fF_2, fF_3) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= f\frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial F_3}{\partial z} + F_3\frac{\partial f}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f
\end{aligned}$$

c) Por demostrar que $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$. Considerando que $\nabla\times$ es el operador rotor, entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\vec{F}) &= \nabla \times (fF_1, fF_2, fF_3) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fF_1 & fF_2 & fF_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(fF_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fF_2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(fF_1) - \frac{\partial}{\partial x}(fF_3) \\ \frac{\partial}{\partial x}(fF_2) - \frac{\partial}{\partial y}(fF_1) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} f\frac{\partial F_3}{\partial y} - F_3\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial F_2}{\partial z} + F_2\frac{\partial f}{\partial z} \\ f\frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial F_3}{\partial x} + F_3\frac{\partial f}{\partial x} \\ f\frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial F_1}{\partial y} + F_1\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}^T \\
&= f\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} F_3\frac{\partial f}{\partial y} - F_2\frac{\partial f}{\partial z} \\ F_1\frac{\partial f}{\partial z} - F_3\frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2\frac{\partial f}{\partial x} - F_1\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}^T \\
&= f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}
\end{aligned}$$

d) Por demostrar que $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$. Considerando que ∇^2 es el operador laplaciano, entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(fg) &= \nabla \cdot \nabla(fg) \\
&= \nabla \cdot (f\nabla g + g\nabla f) \\
&= \nabla \cdot (f\nabla g) + \nabla \cdot (g\nabla f) \\
&= f\nabla \cdot \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g + g\nabla \cdot \nabla f + \nabla g \cdot \nabla f \\
&= f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g
\end{aligned}$$

e) Por demostrar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla f) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}^T \qquad \text{/ Teorema de Clairaut-Schwarz} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donde se aplicó el teorema de Clairaut-Schwarz, el cual dice que si las segundas derivadas parciales de una función son continuas en un entorno abierto de un punto (funciones clase C^2), entonces el orden de derivación no importa, i.e. las derivadas cruzadas son iguales.

f) Por demostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Como asumimos que f es clase C^2, entonces las derivadas cruzadas son iguales, por lo que:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
&= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Pregunta 3

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (-z, y, x)$, responda justificando las siguientes preguntas:

- ¿Existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$?
- ¿Existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$?

Solución:

a) Por (e) de la pregunta 2, sabemos que $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Por lo tanto, si $\nabla f = \vec{F}$, entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$, lo cual no se cumple llegando a una contradicción. Verificando:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z & y & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-z) - \frac{\partial}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(-z) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}^T \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

b) Similarmente, por (f) de la pregunta 2, sabemos que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$. Por lo tanto, si $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$, entonces $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, lo cual no se cumple llegando a una contradicción. Verificando:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{F} &= \nabla \cdot (-z, y, x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(-z) + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} x \\
&= 0 + 1 + 0 \\
&= 1 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Sigue que no existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$.

Pregunta 4

Sea $g(r)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ tal que $g'(2) = 1$. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) |_{\vec{r}(t)} \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

donde $f(x,y) := g(\sqrt{x^2+y^2})$ y $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$.

Solución: Viendo la integral, lo primero que necesitamos es calcular $\vec{r}\,'(t)$, lo cual dado que la curva que se parametriza es un círculo de radio 2, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t)) \\ \Rightarrow \vec{r}\,'(t) &= (-2\sin(t), 2\cos(t)) \end{aligned}$$

Luego, necesitamos calcular $\left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$ evaluado en $\vec{r}(t)$:

$$\left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad \text{/ Regla de la cadena}$$

Donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, el radio en coordenadas polares. Entonces las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= g'(r) = 1 \quad \text{/ Por enunciado} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{x} = \frac{x}{r} = \frac{2\cos(t)}{2} = \cos(t) \quad / \ r = 2 \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{y} = \frac{y}{r} = \frac{2\sin(t)}{2} = \sin(t) \end{aligned}$$

Reemplazando en la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)|_{\vec{r}(t)} \cdot \vec{r}\,'(t)dt &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t))dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1} dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} dt \\ &= 4\pi \end{aligned}$$