Auxiliar 1

Curvas, parametrizaciones y operadores diferenciales

Profesor: Ricardo Carlos Freire
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{f(\theta)\sqrt{a^2+1}}$$

Donde la curvatura se define como

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \quad \text{con} \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Pregunta 2

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos vectoriales y escalares suaves, respectivamente. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

b) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$

c) $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

d) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Pregunta 3

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (-z, y, x)$, responda justificando las siguientes preguntas:

- ¿Existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$?
- ¿Existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$?

Pregunta 4

Sea $g(r)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ tal que $g'(2) = 1$. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) |_{\vec{r}(t)} \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

donde $f(x,y) := g(\sqrt{x^2 + y^2})$ y $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$.

Pregunta 5 (propuesto)

Supongamos que C es una curva suave en el plano o en el espacio dada por $\vec{r}(s)$, donde s es el parámetro de longitud de arco. La curvatura κ en s es

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

a) Demuestre usando regla de la cadena que la definición anterior es equivalente a

$$\kappa = \frac{\left\| \vec{T}'(t) \right\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

donde $r(t)$ es la parametrización de la curva.

b) Y también equivalente a

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$$

Resumen curvas

Curva: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma=\vec{r}([a,b])$.

Derivada de una Curva: La derivada de una curva parametrizada por $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ se define como el vector tangente a la curva en cada punto, y se denota como $\vec{r}\,'(t)$ o $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Esta derivada se calcula tomando la derivada de cada componente de la función por separado.

Propiedades de la derivada de las funciones de valores vectoriales: Supongamos que $\vec{r}$ y $\vec{u}$ son funciones de valores vectoriales diferenciables de t, supongamos que f es una función de valor real diferenciable de t y supongamos que c es un escalar.

- $\frac{d}{dt}[c\vec{r}(t)]=c\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)\pm\vec{u}(t)]=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\pm\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{u}(t)]=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t)]=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\vec{u}(t)+\vec{r}(t)\cdot\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)\times\vec{u}(t)]=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\times\vec{u}(t)+\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt}[\vec{r}(f(t))]=\frac{d\vec{r}(f(t))}{dt}f'(t)$

Teorema de Clairaut (Clairaut-Schwarz):
Sea $f(x,y)$ una función de clase C^2 en un dominio abierto $D\subseteq\mathbb{R}^2$, donde (x,y) son las variables independientes. Si las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ son continuas en D, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\quad\text{para todo }(x,y)\in D.$$

Coordenadas Cilíndricas: La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas viene dada principalmente por:

$$T(\rho,\phi,z)=(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,z)$$

Coordenadas Esféricas: La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada principalmente por:

$$T(r,\theta,\phi)=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$$

Longitud de Curva: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t)=\int_a^t\left\|\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau}\right\|,d\tau$$

Resumen campos y operadores diferenciales

Campo Escalar: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo escalar a toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Campo Vectorial: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo vectorial a toda función $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
Visto de otra forma, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^n$ campos escalares tal que $F_i : \Omega \to \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, entonces:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{x})\vec{e}_i$$

Gradiente de un campo escalar: Sea f un campo escalar, al menos C^1, se define el gradiente de f como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Línea de flujo: Dado un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable, una línea de flujo es una curva $\vec{r}(t)$ que satisface:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Gradiente de un campo vectorial: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el gradiente de $\vec{F}$ como:

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergencia: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Rotor: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el rotor de $\vec{F}$ como:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$