Auxiliar 11

Series de Fourier

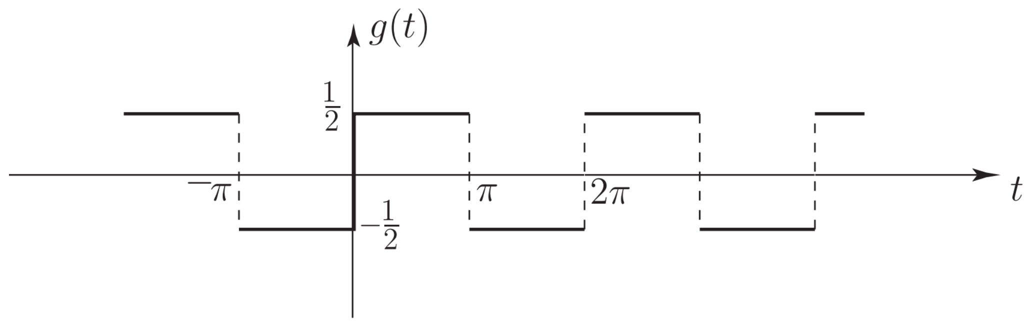
Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 6 de noviembre de 2024

P1. [Por trozos]
Dada la función $g(x) = |x|$, determine su serie de Fourier en $[-1, 1]$.

P2. [Más trozos]
Demuestre que $\displaystyle\sum_{n\in J} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ con $J = \{2j+1 \mid j \in \mathbb{N}\}$ usando apropiadamente la función $h(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi] \end{cases}$.

P3. [Señal cuadrada]
En un laboratorio de electrónica se tiene un generador de funciones donde se está utilizando una señal cuadrada de 1 V *peak to peak* como se muestra en la figura con la función g. Aproxime la función por su serie de Fourier.

¿La paridad es consistente con el gráfico?



P4. [Integrando]
Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y 2ℓ-periódica. Su serie de Fourier está dada por la expresión:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right) + \sum_{n\geq 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right)$$

Se define $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(f(u) - \frac{a_0}{2}\right) du$.

a) Demuestre que $\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = 0$.

b) Muestre que F es 2ℓ-periódica.

c) Sabiendo que el desarrollo de Fourier de F está dado por $F(x) = \dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) + \sum_{n\geq 1} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$, demuestre que $(\forall n \geq 1) : A_n = -\dfrac{\ell}{n\pi} b_n \wedge B_n = -\dfrac{\ell}{n\pi} a_n$.

Principales definiciones y teoremas

- **[Serie de Fourier]:** Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ función integrable. Se define la serie de Fourier de f por:

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right)$$

Con los coeficientes $a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt$, y $(\forall n \geq 1)$:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right),\ b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{l} t\right)$$

- **[Polinomio trigonométrico]:** Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ función integrable. Se denomina polinomio trigonométrico a las sumas parciales:

$$S_f^N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{\ell} t\right)$$

- **[Series de funciones pares e impares]**: Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ función integrable.
    - Si f es par $(f(-t) = f(t)\ \forall t \in [-\ell, \ell])$, entonces $b_n = 0\ \forall n \geq 1$ (o sea, no considera los términos asociados a la función impar.)
    - Si f es impar $(f(-t) = -f(t)\ \forall t \in [-\ell, \ell])$, entonces $a_n = 0\ \forall n \geq 0$ (o sea, no considera los términos asociados a la función par.)

- **[Teorema de convergencia puntual de serie de Fourier]**: Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ función integrable tal que:
    - f continua por trozos
    - f tiene derivada por la izquierda y por la derecha en too punto $t \in (-\ell, \ell)$.
    - $\exists \lim_{t\to\ell^-} f(t)$ i.e. límite por izquierda en ℓ existe.
    - $\exists \lim_{t\to\ell^+} f(t)$ i.e. límite por derecha en ℓ existe.

  Entonces se cumple que:
    - $\big(\forall t \in [-\ell, \ell]\big) : S_f^N(t)$ es convergente.
    - $S_f(t) = f(t)$, $t \in (-\ell, \ell)$.
    - $S_f(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^-} f(t) + \lim_{t\to t_0^+} f(t)\right)$, si hay una discontinuidad en t_0.
    - $S_f(t) = \frac{1}{2}\big(f(-t) + f(t)\big)$, si $t \in \{-\ell, \ell\}$.

- **[Teorema de convergencia]**: Si f es una función derivable en $[-\ell, \ell]$ tal que $f(-\ell) = f(\ell)$, entonces $f = S_f$ en $[-\ell, \ell]$.