MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Pablo Araya
Auxiliares: Bianca Zamora
Jose Zamorano.
Fecha: 19 de Noviembre de 2024

Problemas

P1. Calcule la serie de Fourier de las siguientes funciones

- $f(x) = 2$ con $x \in [-1, 1]$.
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0], \\ x+1 & \text{si } x \in [0, \pi]. \end{cases}$

En cada caso discuta la convergencia de la serie de Fourier.

P2. Desarrolle en serie de cosenos la funcion $f(x) = e^{\lfloor x \rfloor}$ con $x = [0, 2]$. Utilizando este resultado, determine la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

P3. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones

a) $f(x) = \begin{cases} (x-3)e^{-4x} & \text{, si } x \geq 3, \\ 0 & \text{, si } x < 3. \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+6x+13}$

P4. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion integrable, donde $x \to xf(x)$ es una funcion integrable. Muestre que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\widehat{xf(x)}(s) = i\frac{d}{ds}[\widehat{f}(s)].$$

b) Considere la siguiente EDO

$$f''(x) + f'(x-2) = \frac{1}{1+x^2}$$

Encuentre la solucion de la EDO.

Pauta Problemas C3

P1

a) $f(x) = 2$ en $[-1,1]$

f par $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x)\, dx \quad , \quad n \neq 0$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \operatorname{Sen}(n\pi x)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 4$$

Como f es de clase C^1 entonces S_f converge y $S_f = f \quad \forall x \in [-1, 1]$.

b) $f(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{en } [-\pi, 0] \\ x+1 \,, & \text{en } [0, \pi] \end{cases}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (x+1) \cos(nx)\, dx$$

$u = x+1 \rightarrow du = dx$

$dv = \cos(nx)\, dx$

$\hookrightarrow v = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\left((x+1) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right)}_{=0} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_0^{\pi}$$

$$// \quad \frac{\pi}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi}{2} + \cancel{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x+1)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx$$

$u = x+1 \rightarrow du = dx$

$dv = \mathrm{sen}(nx)\,dx$

$\hookrightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)dx \right]$$

$$= \frac{1-(\pi+1)\cos(n\pi)}{\pi n} + \frac{1}{\pi n^2}\operatorname{Sen}(nx)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1-(\pi+1)\cos(n\pi)}{\pi n} = \frac{1-(\pi+1)(-1)^n}{\pi n}$$

Como f es C^1 salvo en $x=0$ y los bordes no coinciden, entonces

$$S_f = f \quad \text{en} \quad (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$$

donde:

$$S_f(0) = \frac{1}{2}\left(f^-(0) + f^+(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

P2

Desarrollo en cosenos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{\lfloor x \rfloor} & , x \in [0,2] \\ e^{\lfloor -x \rfloor} & , x \in [-2,0] \end{cases}$$

$\tilde{f}$ es par. Por lo tanto $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Luego:

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^{0} e^{\lfloor -x \rfloor} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} e^{\lfloor x \rfloor} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right]$$

$$= \int_{0}^{2} e^{\lfloor x \rfloor} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} e^{0} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{1}^{2} e^{1} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2e^0}{n\pi} \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2e^1}{n\pi} \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[e^0 \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - e^1 \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-e) \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Notemos que:

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ 1 & \text{si } n \equiv_4 1 \\ -1 & \text{si } n \equiv_4 3 \end{cases}$$

Si $n = 2k-1 \Rightarrow \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$

<u>Termino $n=0$:</u>

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \tilde{f}(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^2 e^{\lfloor x \rfloor} dx$$

$$= \int_0^1 e^0 dx + \int_1^2 e^1 dx = 1 + e$$

Luego, la serie de fourier queda como sigue:

$$S_{\tilde{f}}(x) = \frac{1+e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-e)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2} \right)$$

Notemos que $\tilde{f}$ es continua en 0 y tiene derivada lateral, por lo tanto $S_f(0) = f(0)$:

$$e^0 = \frac{1+e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-e)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1-e}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-e)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad //$$

P3

a) $f(x) = \begin{cases} (x-3)\, e^{-4x} & , x \geq 3 \\ 0 & , x < 3 \end{cases}$

Por definicion

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3}^{\infty} e^{-iys} (y-3) e^{-4y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{3}^{\infty} y e^{-y(4+is)}\, dy - 3 \underbrace{\int_{3}^{\infty} e^{-y(4+is)}\, dy}_{\left. -\frac{e^{-y(4+is)}}{4+is} \right|_3^{\infty}} \right]$$

$u = y \Rightarrow du = dy$

$dv = e^{-y(4+is)}\, dy \Rightarrow v = -\frac{e^{-y(4+is)}}{4+is}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\left. -\frac{y e^{-y(4+is)}}{4+is} \right|_3^{\infty} \right) + \int_3^{\infty} \frac{e^{-y(4+is)}}{4+is}\, dy - \frac{3e^{-y(4+is)}}{4+is} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{3}{4+is}e^{-3(4+is)} + \frac{1}{4+is}\left(-\frac{e^{-y(4+is)}}{4+is}\Bigg|_3^{\infty}\right) - \frac{3e^{-3(4+is)}}{4+is}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(4+is)^2}\,e^{-3(4+is)}$$

$\blacksquare$

b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

Hint: Considere $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Notemos lo sig.

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2\,f(x)$$

Aplicando TF:

$$\widehat{(g')}(s) = -2\,\hat{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow (is)\,\hat{g}(s) = -2\,\hat{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{is}{2}\,\widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}(s) = \hat{f}(s)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-is}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|s|} = \hat{f}(s)\ //$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6x+13}$

Notemos lo siguiente:

$$x^2+6x+13 = x^2+6x+9+4$$

$$= (x+3)^2+4$$

Luego:

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}(s) = \widehat{\left(\frac{1}{(x+3)^2+4}\right)}(s)$$

$$= e^{3is} \widehat{\left(\frac{1}{x^2+4} \right)} (s)$$

$$= e^{3is} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2|s|}$$

$$\therefore \hat{f}(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{3is - 2|s|}$$

P4

a)

$$\frac{d}{ds}\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-iy) e^{-iys} f(y) dy$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} y f(y) dy$$

$$= -i \, \widehat{(x f(x))} (s)$$

b) Aplicando T. de Fourier a la EDO:

$$\widehat{\left(f''\right)}(s) + \widehat{\left(f'(x-2)\right)}(s) = \widehat{\left[\frac{1}{1+x^2}\right]}(s)$$

$$\Leftrightarrow (is)^2 \hat{f}(s) + e^{-2is} \widehat{(f')}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-|s|}$$

$$\Leftrightarrow -s^2 \hat{f}(s) + e^{-2is} (is) \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-|s|}$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-|s|}}{e^{-2is}(is) - s^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-|s|}}{e^{-2is}(is) - s^2}\, ds$$

$\blacksquare$