

Auxiliar 9

Singularidades y polos de funciones complejas

Profesor: Pablo Araya Zambra

Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal

Fecha: 16 de octubre de 2024

P1. [Qué singular]

Considere las funciones $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por las siguientes reglas de asociación:

$$f(z) = \frac{(z-1)^4(z^2-4)}{\sin^4(\pi z)} \quad g(z) = \frac{\sin(z)}{z^2(z-5)^2(z+2i)^2}$$

Para cada una:

- Encuentre todas los puntos singulares.
- Clasifique los puntos de la parte anterior en singularidades que sean evitables o no.
- Calcule el orden de los polos en caso de que existieran singularidades no evitables.

P2. [Singularmente singular]

Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la función compleja $h_\beta(z) = \frac{ze^{i\beta z}}{(4+z^2)(z-4i)^2}$.

- Demuestre que h_β es meromorfa en $\mathbb{C}$
- Encuentre sus polos y el orden de cada uno de ellos.
- Para un polo p de orden m de una función h , se define su residuo como el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m h(z))$$

Determine el residuo de cada uno de los polos de h_β .

P3. [Nada es lo que parece]

El objetivo del problema es demostrar que para $\alpha, \gamma > 0$ se satisface la siguiente igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha^2 \cos^2(\theta) + \gamma^2 \sin^2(\theta)} d\theta = 2\pi \frac{1}{\alpha\gamma}$$

Para mostrar lo pedido, se propone integrar la función compleja $z \mapsto \frac{1}{z}$ a través de la elipse compleja centrada en el origen, con α y γ sus semiejes mayor y menor, respectivamente y concluya. **[bonus]** Calcule $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z+1)} dz$.

P4. [Integrando] (propuesto)

El propósito del problema es mostrar las siguientes identidades, conocidas como las integrales de Fresnel:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{2\pi} \sin^2(x^2) dx$$

- Considere la curva $\Gamma(R)$ en el plano complejo, correspondiente al contorno de un octavo de circunferencia de radio R en el primer cuadrante. **b)** Estudie la integral $\int_{\Gamma(R)} e^{iz^2} dz$ cuando $z \rightarrow \infty$ y concluya.

Puede considerar conocido que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y que $(\forall \alpha \in [0, 2\pi]) : \sin(2\alpha) \geq \frac{2\alpha}{\pi}$.

Principales definiciones y teoremas

- **[Teorema de Cauchy-Goursat]:** Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, con Ω abierto simplemente conexo, entonces $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva Γ cerrada, simple y regular en Ω .
- **[Fórmula de Cauchy]:** Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sea $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Entonces para todo punto en dicho disco, se tiene que:
$$i2\pi f(z_0) = \oint \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$
- **[Singularidad]:** $p \in \mathbb{C}$ es singularidad de $f(z)$ si f no es holomorfa en p , y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.
- **[Singularidad aislada]:** $p \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de $f(z)$ si f no es holomorfa en p , y f es holomorfa en algún disco $D(p, R) \setminus \{p\}$ para $R > 0$.
- **[Singularidad evitable]:** $p \in \mathbb{C}$ es singularidad evitable de $f(z)$ si p es singularidad aislada y el límite $\lim_{z \rightarrow p} f(z)$ existe (i.e. no diverge).
- **[Polo]:** $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y existe $m \geq 1$ entero tal que el límite $\lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$ existe y es no nulo.
- **[Grado de un polo]:** Corresponde al menor $m \in \mathbb{Z}$ que satisface lo anterior sobre el límite. En caso de que $m = 1$ se denomina polo simple.