Auxiliar 7

Funciones y series en variable compleja

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 2 de octubre de 2024

P1. [Qué complejo]

a) Considere $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z+1| = |z|$, demuestre que $\mathbb{R}\text{e}(z) = -\frac{1}{2}$.

b) Muestre que para $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}$ siempre que $|z| = 1$ y $z^{2n} \neq -1$.

c) Para $z \in \mathbb{C}$, resuelva la ecuación $z^4 - 5i = 0$.

d) **(propuesto)** Sean $\theta \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, y resuelva la siguiente ecuación en $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(-k\theta)$.

P2. [Funcionando]

a) Dado $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ su regla de asociación es $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, encuentre $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de modo que la función $f = u + iv$ satisfaga las condiciones de Cauchy-Riemann.

b) Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice armónica si satisface que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Dada u armónica en todo el plano, se define $v(x,y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)\,ds$. Muestre que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Observación: $F(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,t)dt \implies F'(x) = g(x,\beta(x))\beta'(x) - g(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt.$

P3. [Potente]

a) Determine los radios de convergencia para las siguientes series de potencias en variable compleja:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^{2n}}{n^2+1}$

ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (1+2i)^{-n} z^{2n}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^{2n}}{n!}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+4i)^n$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$

viii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (n + a^n)\, z^n$

ix) **Observación**: algunos podrían quedar propuestos.

b) **i)** Encuentre una expansión en series de potencias para la función $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ en torno a $z_0 = 0$.
ii) Indique el disco de convergencia.