

AUX 5



CURVAS, INTEGRALES DE CAMINO / TRABAJO, TEO'S

P1. [Aplicaciones]

La Ley de Ampère plantea que la circulación del campo magnético en una curva cerrada es proporcional a la corriente que encierra y se escribe como $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}$. Si se tiene el campo magnético $\vec{B} = (x^3, y^2z, y^3 + yz^2)$ fluyendo en la dirección de $\hat{x}$ a través de la superficie de un disco centrado en $(2, 0, 0)$ de radio 2 paralelo al plano YZ , determine la corriente que produce.

P2. [Teorema del Gradiente]

Sea C es una curva simple orientada desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, 2, 4)$. Determine el valor de la integral de línea $\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$.

P3. [Teorema de Green]

Calcule el área delimitada entre el eje X y la cicloide $x = a(\theta - \sin(\theta))$, $y = a(1 - \cos(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ ($a > 0$).

P4. [Teorema de Stokes]

a) Considerando la curva Γ dada por la intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, recorrida en sentido antihorario, calcule la integral de línea $\oint_{\Gamma} 2yz^2 dx + xz^2 dz + 3xyz dz$.

b) Calcule $\iint_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{M}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, 0 < z < 3\}$.

P5. [Curvas]

Considere la curva $\mathcal{N}$ que se mueve sobre la superficie de un paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$, tal que los parámetros ρ, θ en coordenadas cilíndricas que describen esta curva satisfacen la ecuación diferencial $\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \rho$ de condiciones iniciales $\rho(0) = 1$ y $\rho'(0) = 1$.

a) Bosqueje el paraboloide donde se encuentra $\mathcal{N}$, indicando el punto de partida de la curva.

b) Encuentre una parametrización de $\mathcal{N}$ en términos del parámetro $\theta \geq 0$ y dibuje la curva $\mathcal{N}$ con su orientación.

c) Determine un potencial explícito para el campo vectorial $\vec{T}(x, y, z) = (z(1 + xz)e^{xz+y}, xze^{xz+y}, x(1 + xz)e^{xz+y})$. ¿Qué puede decir acerca de si es o no conservativo? Argumente.

d) Suponga que $\mathcal{N}$ se recorre por una partícula P sometida a una fuerza dada por el campo $\vec{F}$. Calcule el trabajo realizado por dicha fuerza al llevar esta partícula desde la altura $z = 1$ hasta $z = e^{-n\pi}$ (para $n \in \mathbb{N}$ fijo). ¿Cuál sería el trabajo para llevar la partícula hasta el origen?

P_7

.

P1. [Aplicaciones]

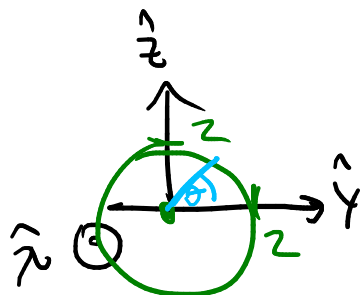
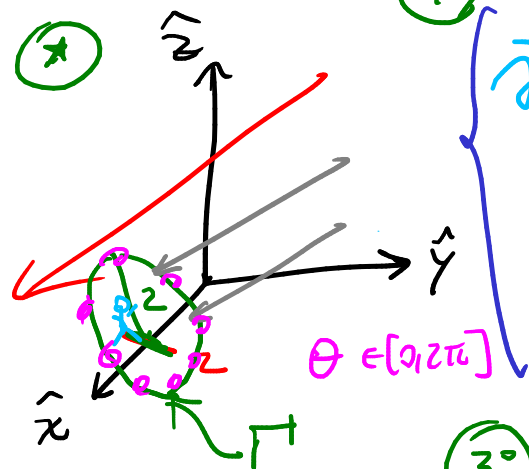
La Ley de Ampère plantea que la circulación del campo magnético en una curva cerrada es proporcional a la corriente que encierra y se escribe como $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$. Si se tiene el campo magnético $\vec{B} = (x^3, y^2z, y^3 + yz^2)$ fluyendo en la dirección de $\hat{x}$ a través de la superficie de un disco centrado en $(2, 0, 0)$ de radio 2 paralelo al plano YZ , determine la corriente que produce.

$$\textcircled{0^\circ} \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

$$\Rightarrow I_{enl} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_{Dom(\vec{r})} \vec{B}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$\vec{B} = (x^3, y^2z, y^3 + yz^2)$$



$$\textcircled{1^\circ} \quad \vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \mapsto \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3^\circ} \quad \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

0°) Entender el ejercicio
 1°) Parametrizar $\Gamma \rightarrow \vec{r}$

$$2^\circ) \vec{B}(\vec{r}(\theta))$$

$$3^\circ) \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$4^\circ) \vec{B}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$5^\circ) \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

2°

$$\vec{B} = (x^3, y^2z, y^3 + yz^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta \mapsto \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} z \\ 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{B}(\vec{r}(\theta)) &= \begin{pmatrix} 8 \\ 8\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ 8\cos^3(\theta) + 8\cos(\theta)\sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta) \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \right] = \cos(\theta) \\ &= 8 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3° $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$

4° $\vec{B}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} = 16 \left(0 - \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \right) = 16 \cos^2(\theta) (1 - \sin^2(\theta)) = 16 \cos^2(\theta) \cos^2(\theta) = 16 \cos^4(\theta)$

50

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} 16 \cos^4(\theta) d\theta = 16 \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = 16 \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta))^2 d\theta$$

$$\underline{\underline{(\cos^2(\theta))^2}} = \underline{\underline{\left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)^2}}$$

$$= \dots$$

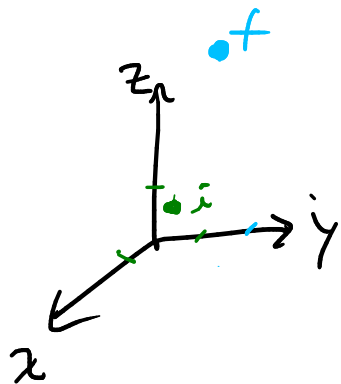
$$= 12\pi //$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} [\sin(\theta)]_0^{2\pi}$$

P_z

P2. [Teorema del Gradiente]

Sea C es una curva simple orientada desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, 2, 4)$. Determine el valor de la integral de línea $\int_C (2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz)$.



$$\vec{F} = \underbrace{\nabla \phi}_{\substack{\text{vectorial} \\ \text{escalar}}} \quad \text{potencial}$$

↑
vectorial

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt =$$

$$= \int_a^b \nabla \phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt =$$

$$= [\phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))]$$

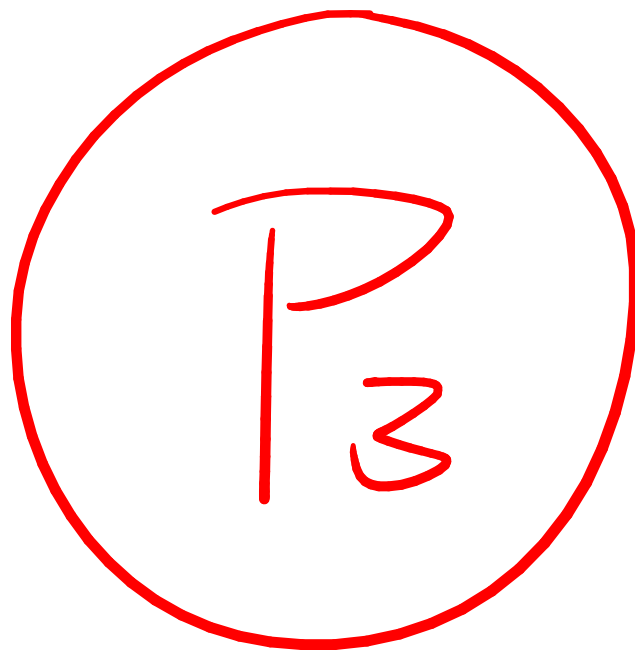
$$\int_C \begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} ; \phi(x, y, z) = x^2 y z$$

$$= \phi(1, 2, 4) - \phi(1, 1, 1)$$

$$= 8 - 1 = 7 //$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2xyz \\ x^2z \\ x^2y \end{pmatrix}} = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

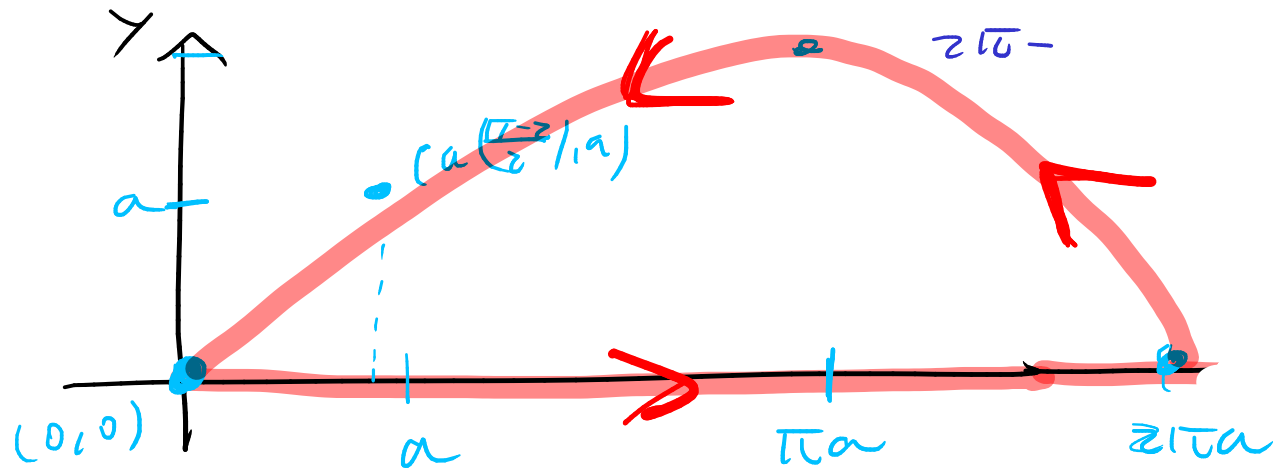
$$\begin{cases} \phi: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \phi(x, y, z) = x^2 y z \end{cases}$$



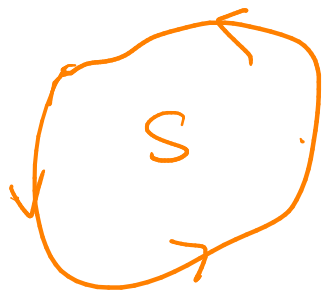
P3. [Teorema de Green]

Calcule el área delimitada entre el eje X y la cicloide $x = a(\theta - \sin(\theta))$, $y = a(1 - \cos(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ ($a > 0$).

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$$

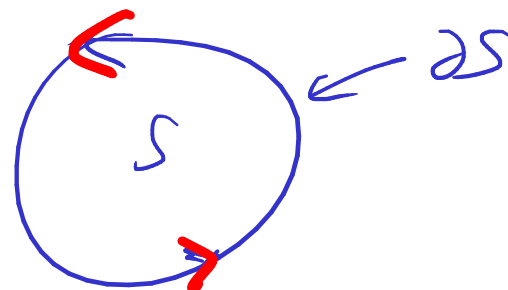


θ	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$a(\frac{\pi-2}{2})$	a
π	$a\pi$	$2a$
2π	$2\pi a$	0



$$\begin{cases} \vec{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \vec{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta - \sin(\theta)) \\ a(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$$\oint_{\partial S} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\hat{A}_{\text{nea}}(S) = \iint_S dx dy$$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$$

$\hat{A}_{\text{nea}}(S)$

$$\Rightarrow \oint_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \hat{A}_{\text{nea}}(S)$$

$$\oint_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{\partial S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{\text{Dom}(\vec{r})} \vec{F}(\vec{r}(x)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$\vec{r} \left| \begin{array}{l} \vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \mapsto \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta - \sin(\theta)) \\ a(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right| \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} a - a\cos(\theta) \\ a\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(x)) \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a(\theta - \sin(\theta)) \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(x)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} &= a^2 \sin(\theta) (\theta - \sin(\theta)) \\ &= a^2 \sin(\theta) \theta - a^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\int_{2\pi}^0 a^2 \sin(\theta) \theta - a^2 \underbrace{\sin^2(\theta)}_{\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} d\theta$$

$$= 3a^2\pi = \text{Area}(S)$$

$$x = a(\theta - \cos(\theta))$$

$$y = a(1 - \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow dy = a \sin(\theta)$$

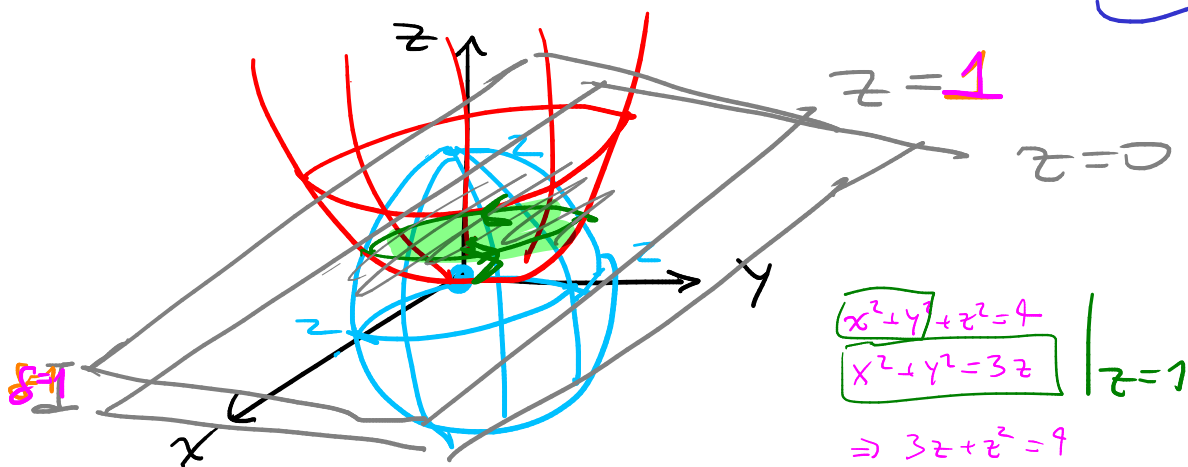
$$x dy =$$

P_4

P4. [Teorema de Stokes]

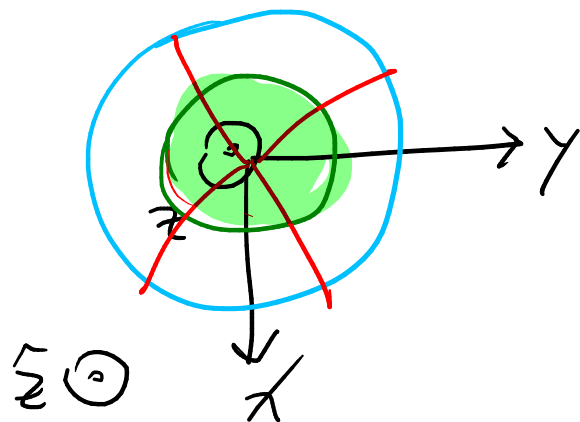
- a) Considerando la curva Γ dada por la intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, recorrida en sentido antihorario, calcule la integral de línea $\oint_{\Gamma} 2yz^2 dx + xz^2 dz + 3xyz dz$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 + y^2 = 3z\}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Big|_{z=1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3z + z^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow z^2 + 3z - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+4)(z-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -4 \wedge z = 1 \end{aligned}$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

$$\Gamma = \partial S$$

• conada, simple, regular, orientable

• orientable
• regular

$$\oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} 2yz^2 \\ xz^2 \\ 3xyz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{\varphi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) \mapsto \vec{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$D = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2yz^2 \\ xz^2 \\ 3xyz \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz^2 & xz^2 & 3xyz \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3xz - 2xz \end{pmatrix} \hat{i} - \begin{pmatrix} 3yz - 4yz \end{pmatrix} \hat{j} + \begin{pmatrix} z^2 - 2z^2 \end{pmatrix} \hat{k}$$

$$= xz \hat{i} - (-yz) \hat{j} + (-z^2) \hat{k}$$

$$= xz \hat{i} + yz \hat{j} - z^2 \hat{k} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -z^2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ -z^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\iint_{\text{Dom}(\vec{\varphi})} \vec{F}(\vec{\varphi}(\rho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \right)}_{\text{Dom}(\vec{\varphi})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta) \mapsto \vec{\varphi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ D = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

$$* \vec{F}(\vec{\varphi}(\rho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\rho$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} -\rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot (-1) \int_0^{\sqrt{3}} \rho \, d\rho = \cancel{[0]_0^{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{[\rho^2]_0^{\sqrt{3}}} = \cancel{2\pi} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} (-3) = -3\pi //$$

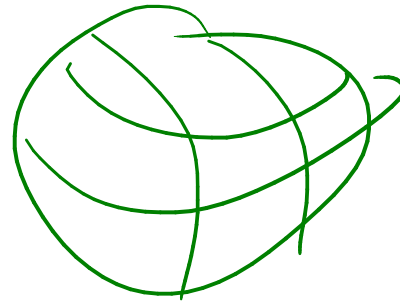
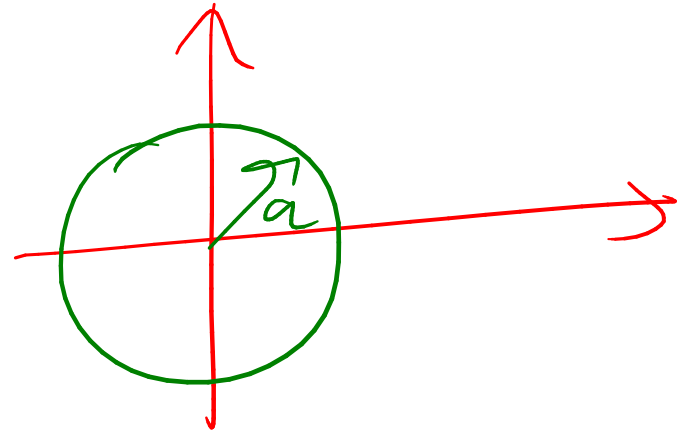
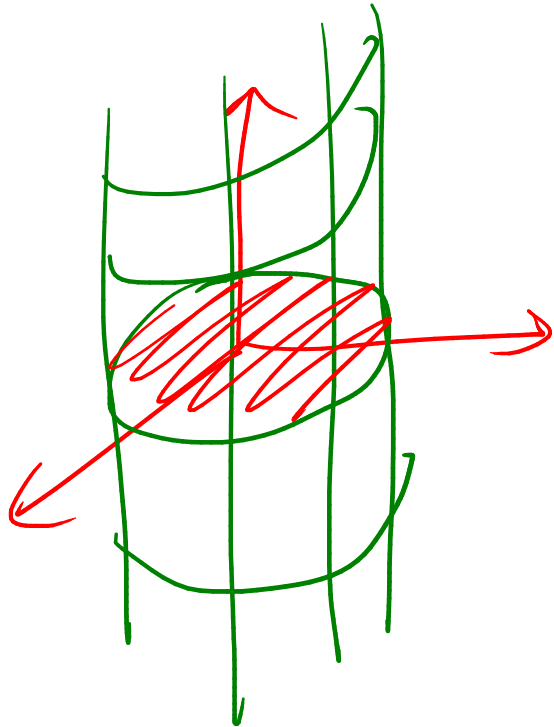
$$* \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\theta) \\ \rho \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$* \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = 0\hat{i} - 0\hat{j} + \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) \hat{k} = \rho \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$$

$$* \vec{F}(\vec{\varphi}(\rho, \theta)) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$



JΓ

b) Calcule $\iint_S \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{M}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, 0 < z < 3\}$.

$$z = 4 - (x^2 + y^2)$$

