Universidad de Chile · Primavera 2024
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Auxiliar 5

Curvas, integral de trabajo y teoremas asociados

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 11 de septiembre de 2024

P1. [Aplicaciones]
La Ley de Ampère plantea que la circulación del campo magnético en una curva cerrada es proporcional a la corriente que encierra y se escribe como $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}}$. Si se tiene el campo magnético $\vec{B} = (x^3, y^2z, y^3 + yz^2)$ fluyendo en la dirección de $\hat{x}$ a través de la superficie de un disco centrado en $(2,0,0)$ de radio 2 paralelo al plano YZ, determine la corriente que produce.

P2. [Teorema del Gradiente]
Sea $\mathcal{C}$ es una curva simple orientada desde el punto $(1,1,1)$ hasta el punto $(1,2,4)$. Determine el valor de la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$.

P3. [Teorema de Green]
Calcule el área delimitada entre el eje X y la cicloide $x = a(\theta - \text{sen}(\theta))$, $y = a(1-\cos(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ $(a > 0)$.

P4. [Teorema de Stokes]

a) Considerando la curva Γ dada por la intersección entre la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2+y^2 = 3z$, recorrida en sentido antihorario, calcule la integral de línea $\oint_\Gamma 2yz^2dx + xz^2dz + 3xyzdz$.

b) Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{M}\cdot d\vec{\mathcal{S}}$ para $\vec{M}(x,y,z) = (3y, 4z, -6x)$ y $\mathcal{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, 0 < z < 3\}$.

P5. [Curvas]
Considere la curva $\mathcal{N}$ que se mueve sobre la superficie de un paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$, tal que los parámetros ρ, θ en coordenadas cilíndricas que describen esta curva satisfacen la ecuación diferencial $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho$ de condiciones iniciales $\rho(0) = 1$ y $\rho'(0) = -1$.

a) Bosqueje el paraboloide donde se encuentra $\mathcal{N}$, indicando el punto de partida de la curva.

b) Encuentre una parametrización de $\mathcal{N}$ en términos del parámetro $\theta \geq 0$ y dibuje la curva $\mathcal{N}$ con su orientación.

c) Determine un potencial explícito para el campo vectorial $\vec{T}(x,y,z) = \big(z(1+xz)e^{xz+y}, xze^{xz+y}, x(1+xz)e^{xz+y}\big)$. ¿Qué puede decir acerca de si es o no conservativo? Argumente.

d) Suponga que $\mathcal{N}$ se recorre por una partícula P sometida a una fuerza dada por el campo $\vec{F}$. Calcule el trabajo realizado por dicha fuerza al llevar esta partícula desde la altura $z = 1$ hasta $z = e^{-n\pi}$ (para $n \in \mathbb{N}$ fijo). ¿Cuál sería el trabajo para llevar la partícula hasta el origen?