DESARROLLO AUX 1

OPERADORES DIFERENCIALES Y CAMPOS

MA2002-1
2024-2

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal

P_1

Idea: imaginar campos vectoriales como una corriente que puede afectar su entorno (como un río). Es de interés estudiar la tendencia de los objetos inmersos en él (líneas de flujo) y el efecto que provoca en general (líneas de campo).

Línea de flujo se obtiene resolviendo la ecuación

$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$, con $\vec{F}$ el campo vectorial de interés.

Líneas de campo se obtienen al ubicarse en cada posición del espacio (x,y,z) y graficar el vector $(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ que asigna a ese punto el campo vectorial.

P1 a) $\begin{cases} \vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\text{en cada } (x,y) \text{ grafica vector } (x_0,y_0) \text{ (cte, siempre el mismo!)}} \end{cases}$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ fijas

$\leftarrow$ campo constante (en cada punto grafica $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$)

La línea de flujo es $\gamma(t)$ t.q. $\frac{d\gamma}{\partial t}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$

en este caso, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ (porque $\vec{F}$ debe recibir 2 entradas)

Luego $\frac{d\gamma}{\partial t}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$

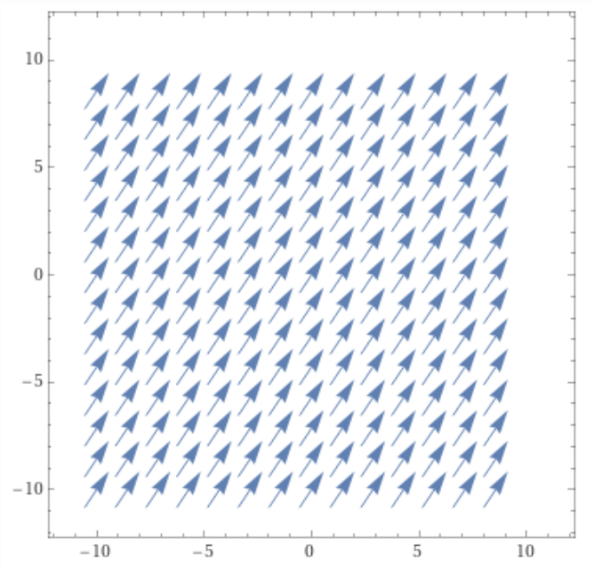
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$ pues F es constante!

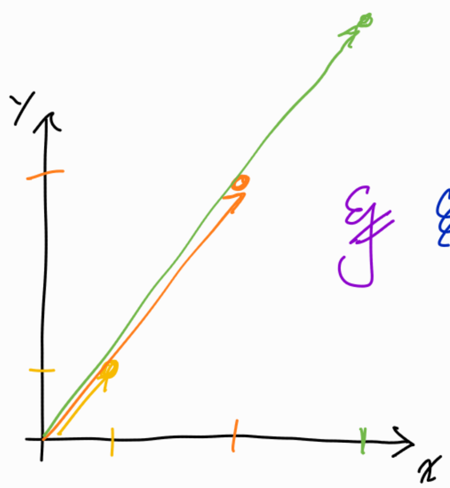
resolver EDO's

movimiento rectilíneo

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 t + c_1 \\ y_0 t + c_2 \end{pmatrix}$$, al resolver E.D.O. con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} t + c,$$ $c \in \mathbb{R}^2$ arbitrario





Ej $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$t = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$t = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

↳ el movimiento de una partícula con estas condiciones queda descrito en estos instantes.

(P1) b) $\begin{cases}\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \vec{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{cases}$ identidad

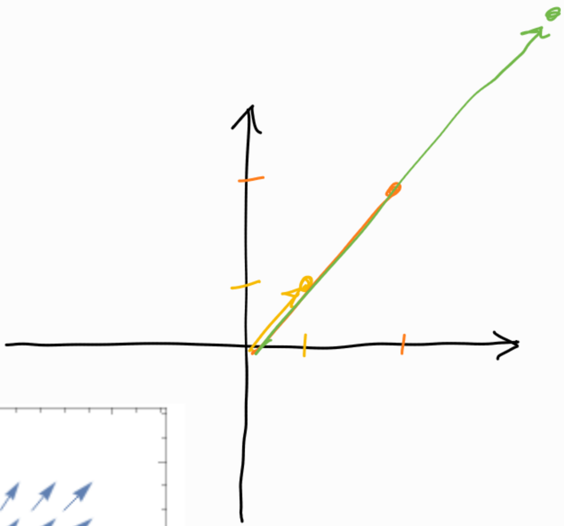
en cada punto (x,y) grafica el vector (x,y); si $|x|,|y|$ aumenta, la magnitud del vector (x,y) también!

Se busca $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$

O sea
$$\begin{pmatrix}\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\\ \frac{d\gamma_2}{dt}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$$
resolver EDO's

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 e^t\\ c_2 e^t\end{pmatrix}$$
, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarias

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}$$
con $c \in \mathbb{R}$ cte. arbitraria

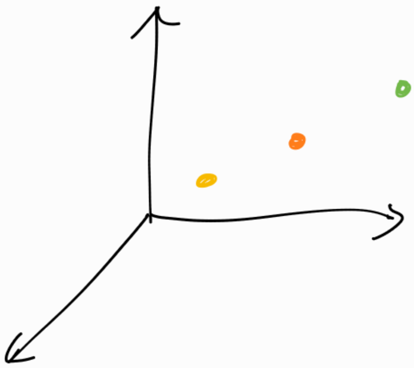


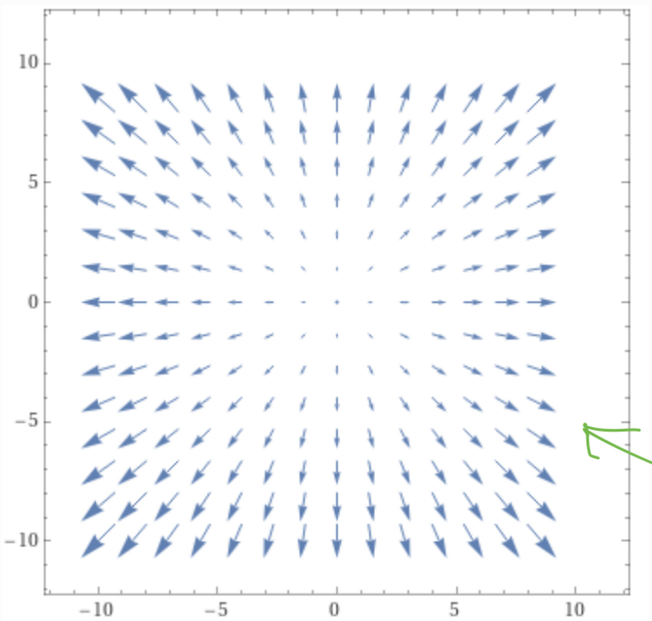
$\underline{c=1}$

$t=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$t=1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix}$

$t=2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}e^2\\e^2\end{pmatrix}$





es como una "fuente"
se espera que su divergencia sea $\oplus$

P1 c) $\begin{cases} \vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 - y \end{pmatrix}} \end{cases}$

en cada punto (x,y) dibuja el vector 1 unidad a la derecha y y^2-y unidades verticales

Se quiere $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{dt}(t) \\ \frac{d\gamma_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2^2(t) - \gamma_2(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{1}{1-ke^t} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \varphi_1 \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{matrix}$$

apareció EDO... para quedarse

②: por variables separables:

$$\frac{1}{\gamma_2^2 - \gamma_2} d\gamma_2 = dt \quad (\gamma_2 \neq 0 \wedge \gamma_2 \neq 1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\gamma_2^2 - \gamma_2} d\gamma_2 = \int dt \underset{\text{factoriza}}{\Leftrightarrow} \int \frac{1}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} d\gamma_2 = \int dt$$

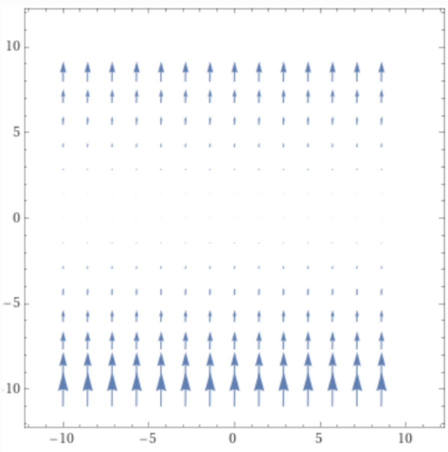
$$\underset{\text{sumas parciales para integrar}}{\Leftrightarrow} \int \frac{1}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_2} \, d\gamma_2 = \int dt \Leftrightarrow \ln(|\gamma_2 - 1|) - \ln(|\gamma_2|) = t + \varphi, \ \varphi \in \mathbb{R}$$

absorbe cte. de ambos lados

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}\right|\right) = t + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\exp(\cdot)}{\Leftrightarrow} \left|\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}\right| = e^t e^\varphi = \beta e^t, \ \beta := e^\varphi > 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} = ke^t, \ k := \pm\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2 - 1 = ke^t \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_2(1 - ke^t) = 1 \Leftrightarrow \gamma_2 = \frac{1}{1-ke^t}, \ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$



↳ $t \to \pm\infty \Rightarrow \gamma_2 \to \pm\infty$
↳ $t \to 0^+ \Rightarrow \gamma_2 \to -\infty$
↳ $t \to 0^- \Rightarrow \gamma_2 \to +\infty$
(en la segunda componente)

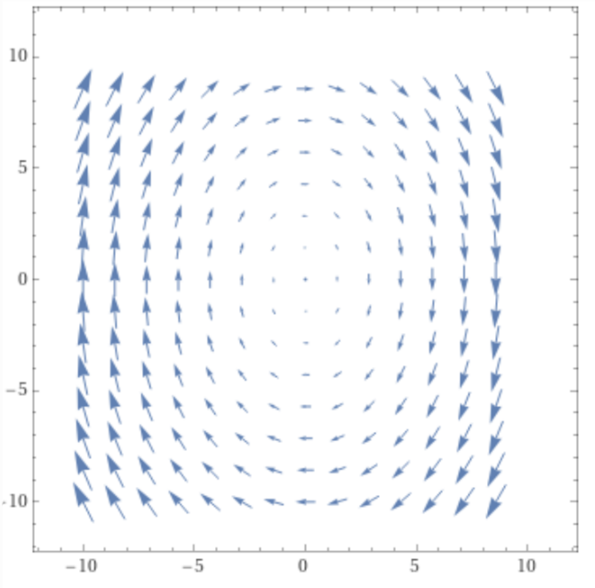
Grafiquen la curva $\gamma(t)$ en CalcPlot3D (está en enlaces) y verán que satisface lo del mapa :)

P1 d)

$$\begin{cases} \vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2x \end{pmatrix} \end{cases}$$

en cada punto (x,y) grafica el vector con y unidades horizontales y $-2x$ unidades verticales

Su comportamiento se ve así:



El hecho de que haya un signo negativo en una componente provoca que vaya "girando".

P2

PROPUESTO

Hágalo para repasar la idea de líneas de flujo, operadores diferenciales y coordenadas cilíndricas (Aux. 2).

P_3

En cartesianas?

- $rot(\vec{F}) \equiv$ "determinante $\begin{pmatrix} \text{versores en orden} \\ \text{derivadas en orden} \\ \text{componentes en orden} \end{pmatrix}$"

- $div(\vec{F}) \equiv$ "suma derivada de cada campo c/r a la variable del versor"

- $grad(\vec{F}) \equiv$ "vector con derivada de cada campo en la posición que corresponde al versor asociado al campo"

P3 a) $\vec{F} = \left(3x^2y - 3x + e^x \operatorname{sen}(z)\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + \left(e^x\cos(z) - 3x\right)\hat{k}$

calcular $\operatorname{rot}(\vec{F})$, $\operatorname{div}(\vec{F})$

Notar que $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$ pues lo es coordenada a coordenada (álgebra y composiç de polinomios y funciones trigonométricas). Luego su divergencia y su rotor están bien definidos.

En efecto,

$$\bullet\ \underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\operatorname{rot}(\vec{F})} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2y - 3x + e^x \operatorname{sen}(z) & x^2 & e^x\cos(z) - 3x \end{vmatrix}$$

$$= \left[\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial z}(x^2)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos(z) - 3x\right)}\right]\hat{\imath}$$

$$- \underbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y - 3z + e^x\operatorname{sen}(z)\right)}_{= -3 + e^x\cos(z)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos(z) - 3x\right)}_{= e^x\cos(z) - 3}\right]}_{= -3 + e^x\cos(z) - e^x\cos(z) + 3 = 0}\hat{\jmath}$$

$$+ \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2)}_{2x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y - 3z + e^x\operatorname{sen}(z)\right)}_{3x^2}\right]\hat{k}$$

$$= 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + (2x - 3x^2)\hat{k} \,//$$

$$\bullet\ \underbrace{\nabla \cdot \vec{F}}_{\operatorname{div}(\vec{F})} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y - 3x + e^x\operatorname{sen}(z)\right) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y}(x^2)} + \frac{\partial}{\partial z}\left(e^z\cos(z) - 3x\right)$$

$$= 6x - 3 + e^x\operatorname{sen}(z) + e^z\cos(z) - e^z\operatorname{sen}(z) \,//$$

(P3) b) $\vec{G} = yz\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + yx\hat{k}$

P.D.Q. $\nabla \times \vec{G} = 2x\hat{\imath} - 2z\hat{k}$

Se puede chequear directamente, además rotor del campo vectorial está bien definido pues es $\mathcal{C}^1$ ya que lo es en cada coordenada (álgebra de polinomios)

En efecto,

$$\nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ yz & -xz & yx \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(yx) - \frac{\partial}{\partial z}(-xz)\right)\hat{\imath}$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(yx)\right)\hat{\jmath}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)\hat{k}$$

$$= (x-(-x))\hat{\imath} - \underbrace{\cancel{(y-y)}}_{\to 0}\hat{\jmath} + (-z-z)\hat{k}$$

$$= 2x\hat{\imath} - 2z\hat{k} \quad \blacksquare$$

(P3) c) $\begin{cases} v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto v(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$

Calcular ∇v

Notar que el campo escalar es al menos continuamente diferenciable ($\mathcal{C}^1$) pues se define por álgebra (suma) y composición (potencia segunda) de funciones de ese tipo (polinomios).

En efecto,

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2)\hat{k}$$

$$= 2x\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \quad //$$

P4

Aquí la idea es usar los facts:

* gradiente es $\underbrace{\text{irrotacional}}_{\text{rotor nulo}}$: $\nabla \times (\nabla u) = 0$ $\forall u$ campo escalar $\mathcal{C}^1$

* rotor es $\underbrace{\text{solenoidal}}_{\text{divergencia nula}}$: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ $\forall \vec{F}$ campo vectorial $\mathcal{C}^2$

También la idea es proceder por contradicción porque asegurar existencias se prueba menos complicado así.

P4 $\vec{F} = -z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$

¿$\exists$ u escalar t.q. $\nabla u = \vec{F}$?

Por contradicción,

supongamos que existe $u : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q. $\nabla u = \vec{F}$

$\Rightarrow \text{rot}(\nabla u) = \text{rot}(\vec{F})$; gradiente es irrotacional

$\Rightarrow \vec{0} = \text{rot}(\vec{F})$

pues:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ -z & y & x \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - (1-(-1))\hat{\jmath} + 0\hat{k} = -2\hat{\jmath} \neq \vec{0}$$

Luego, tal u no puede existir $\blacksquare$

¿$\exists$ $\vec{G}$ t.q. $\text{rot}(\vec{G}) = \vec{F}$?

Por contradicción,

supongamos que existe $\vec{G} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\text{rot}(\vec{G}) = \vec{F}$

$\Rightarrow \text{div}(\text{rot}(\vec{G})) = \text{div}(\vec{F})$; rotor es solenoidal

$\Rightarrow 0 = \text{div}(\vec{F})$

pues:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(-z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1 \neq 0$$

Luego, tal $\vec{G}$ no puede existir $\blacksquare$

P5

La idea en general de las identidades para demostrarlas es elegir el lado que de la mayor cantidad de información. También es útil el orden! así es más sencillo ver cómo reordenar los términos para obtener la expresión del otro lado.

$\vec{E}, \vec{B} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares

↳ suficientemente diferenciables para que todos los operadores estén bien definidos.

P5 a) P.D.Q. $\nabla(fg) = f\nabla g + \nabla f\, g$ — podría aportar más info. porque se tiene la def. directa del gradiente

Así $\nabla(fg) = \dfrac{\partial(fg)}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial(fg)}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial(fg)}{\partial z}\hat{k}$

derivada de un producto pues $fg = f(x,y,z),\ g(x,y,z)$.

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) g\,\hat{\imath} + f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) g\,\hat{\jmath} + f\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) g\,\hat{k} + f\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\hat{k}$$

factorizar

$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\hat{k}\right] g + f\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\hat{k}\right]$$

$$= \nabla f\, g + f\nabla g \quad \blacksquare$$

P5 b) P.D.Q. $\mathrm{div}(f\vec{E}) = \nabla f\cdot\vec{E} + f\,\mathrm{div}(\vec{E})$

Usando $\vec{E} = E_1\hat{\imath} + E_2\hat{\jmath} + E_3\hat{k}$ (hay que explicitar la forma del campo con el que se va a trabajar)

$\Rightarrow f\vec{E} = fE_1\hat{\imath} + fE_2\hat{\jmath} + fE_3\hat{k}$

(*) Recordar que $\begin{cases} E_i = E_i(x,y,z),\ i\leq 3 \\ f = f(x,y,z)\end{cases}$ ↳ hay dependencia con las variables

Así, $\mathrm{div}(f\vec{E}) = \dfrac{\partial(fE_1)}{\partial x} + \dfrac{\partial(fE_2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(fE_3)}{\partial z}$ — derivada de un producto

$$\overset{(*)}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)E_1 + f\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)E_2 + f\left(\frac{\partial E_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)E_3 + f\left(\frac{\partial E_3}{\partial z}\right)$$

factorizar

$$= f\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial E_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial E_3}{\partial z}\right)\right] + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)E_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)E_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)E_3}_{\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}}$$

$$= f\,\mathrm{div}(\vec{E}) + \nabla f\cdot\vec{E} \quad \blacksquare$$

$\partial_q h \equiv \dfrac{\partial h}{\partial q}$ (notación)

(P_5) c) PROPUESTO//

(P_5) d) P.D.Q. $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

podría ser útil tener "a la vista" la forma de los rotores y el producto cruz. También el lado izquierdo solo es derivar.

$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\hat{\imath} + E_2\hat{\jmath} + E_3\hat{k} \\ \vec{B} = B_1\hat{\imath} + B_2\hat{\jmath} + B_3\hat{k} \end{cases}$$

→ se les da una forma (recordar que $E_i, B_i = E_i(x,y,z), B_i(x,y,z), i\leq 3$)

• $$\vec{E}\times\vec{B} = (E_1\hat{\imath} + E_2\hat{\jmath} + E_3\hat{k}) \times (B_1\hat{\imath} + B_2\hat{\jmath} + B_3\hat{k})$$

$$= E_1B_1 \underbrace{\cancel{\hat{\imath}\times\hat{\imath}}}_{0} + E_1B_2\,\hat{\imath}\times\hat{\jmath} + E_1B_3\,\hat{\imath}\times\hat{k}$$

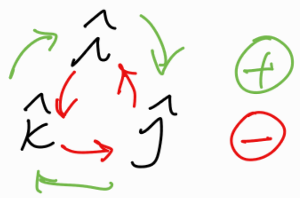
$$+ E_2B_1\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} + E_2B_2 \underbrace{\cancel{\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}}}_{0} + E_2B_3\,\hat{\jmath}\times\hat{k}$$

$$+ E_3B_1\,\hat{k}\times\hat{\imath} + E_3B_2\,\hat{k}\times\hat{\jmath} + E_3B_3 \underbrace{\cancel{\hat{k}\times\hat{k}}}_{0}$$

$$= E_1B_2\,\hat{k} + E_1B_3(-\hat{\jmath})$$

$$+ E_2B_1(-\hat{k}) + E_2B_3\,\hat{\imath}$$

$$+ E_3B_1\,\hat{\jmath} + E_3B_2(-\hat{\imath})$$



mnemotecnia para los productos cruz

$$= (E_2B_3 - E_3B_2)\hat{\imath} + (E_3B_1 - E_1B_3)\hat{\jmath} + (E_1B_2 - E_2B_1)\hat{k}$$

• $$\nabla\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Así $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$

No se agobien con el desarrollo... con orden sale bonito!

$$= \frac{\partial}{\partial x}(E_2B_3 - E_3B_2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_3B_1 - E_1B_3) + \frac{\partial}{\partial z}(E_1B_2 - E_2B_1)$$

$$= \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}\right)B_3 + E_2\left(\frac{\partial B_3}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial E_3}{\partial x}\right)B_2 - E_3\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial E_3}{\partial y}\right)B_1 + E_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial E_1}{\partial y}\right)B_3 - E_1\left(\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial E_1}{\partial z}\right)B_2 + E_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)B_1 - E_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)$$

derivada de un producto

$$\frac{\partial}{\partial q}(AB) = \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)B + A\left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)$$

$$\approx [AB]' = A'B + AB'$$

factorizar, reordenar

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\right]B_3} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\right]B_2} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\right]B_1}$$

$$+ E_2\left[\left(\frac{\partial B_3}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)\right] + E_3\left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\right] + E_1\left[\left(\frac{\partial B_2}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)\right]$$

expresar como producto punto (conmuta)

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial E_3}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial E_2}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial E_1}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial E_3}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial E_1}{\partial y}\right) \end{pmatrix}}_{= \nabla\times\vec{E}} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial B_2}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial B_3}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial B_3}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x}\right) \end{pmatrix}}_{= -\nabla\times\vec{B}}$$

$$= \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B} \qquad \blacksquare$$

laplaciano

P5 e) P.D.Q. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g$

Recordar que $\Delta u = \nabla^2 u := \operatorname{div}(\nabla u)$

Así, $\Delta(fg) = \operatorname{div}(\nabla(fg))$

$$= \operatorname{div}(f\nabla g + g\nabla f)$$

a)

$$= \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f)$$

$$= \left[\nabla f\cdot\nabla g + f\underbrace{\operatorname{div}(\nabla g)}_{\Delta g}\right] + \left[\nabla g\cdot\nabla f + g\underbrace{\operatorname{div}(\nabla f)}_{\Delta f}\right]$$

b)

$$= f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f\cdot\nabla g \quad \blacksquare$$

P5 f) PROPUESTO//

P6

La idea será aplicar las defs. del enunciado!

(P6) Contexto: modelamiento del campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en un medio de permitividad μ y permeabilidad ε. Se presentan ciertas relaciones y características (en el supuesto de que es una región del espacio sin carga eléctrica):

- $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

campo desplazamiento

campo intensidad magnética

[rotor es calculado c/r a (x,y,z) (variables espaciales)]

- $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ (son solenoidales)

Hay que demostrar que se satisfacen:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Para esto el enunciado sugiere demostrar

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

para un campo vectorial. Queda propuesto, pero se va a usar en el desarrollo.

La idea es llegar al laplaciano de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ mediante la identidad del enunciado. Pero también es importante que las ecuaciones del rotor de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están en términos de otros vectores ($\vec{B}$ y $\vec{D}$) así que será útil dejar todo en términos de lo que se quiere despejar: $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

un término es grad(divergencia), y por hipótesis los campos son solenoidales así que eso se anula.

En efecto, notar que

- $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \underset{\vec{B}=\mu\vec{H}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) \underset{\substack{\text{linealidad}\\ \text{derivada}}}{=} -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ //

- $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \underset{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) \underset{\substack{\text{linealidad}\\ \text{derivada}}}{=} \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ //

Luego, por la identidad del enunciado para $\vec{E}$:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\vec{E}}}_{=0}) - \nabla^2\vec{E}$$

$=0 \Rightarrow 0$: $\vec{E}$ es solenoidal, y grad(0)=0 (porque es derivar cero)

$$\Leftrightarrow \nabla\times\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\vec{E}$$

linealidad del rotor

$$\Leftrightarrow -\mu\,\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\nabla^2\vec{E} \quad /\cdot(-1)$$

¿Y ahora cómo se podría seguir?

No se tiene info sobre el rotor de $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, pero sí sobre el rotor de $\vec{H}$, entonces "dan ganas" de decir que $\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$, y es cierto! (demuéstrenlo como ejercicio para practicar identidades de operadores diferenciales; esto es verdad exclusivamente porque el rotor se calcula c/r a variables espaciales, entonces quedan derivadas del estilo $\frac{\partial^2}{\partial q\partial t}$, $q\in\{x,y,z\}$, que se pueden intercambiar por Teo. Schwartz al asumir los campos de clase C^2), Así, como $\nabla^2 \vec{E} = \mu \, \nabla \times \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ lo comentado

$$\iff \nabla^2 \vec{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$ hipótesis

$$\iff \nabla^2 \vec{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$ linealidad derivada

$$\iff \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$ //

Para $\vec{H}$ es análogo :)

Y así comienza el curso! Los desarrollos son "matraqueros" pero los invito a verlos como que tienen bastantes simetrías que permiten llegar a resultados lindos.

Ánimo y cualquier duda, pregunten! :)

Recomendación de la semana: