Auxiliar 1

Operadores diferenciales y campos

Profesor: Pablo Araya Zambra
Auxiliares: Bianca Zamora Araya y José Zamorano Recabal
Fecha: 14 de agosto de 2024

P1. [Líneas de flujo]
Dibuje[1] las líneas de flujo de los campos vectoriales definidos por las siguientes reglas, con $x_0, y_0, \beta \in \mathbb{R}$ constantes.

a) $\vec{F_1}(x,y) = (x_0, y_0)$ **b)** $\vec{F_2}(x,y) = (x,y)$ **c)** $\vec{F_3}(x,y) = (1, y^2 - y)$ **d)** $\vec{F_4}(x,y) = (y, -2x)$

P2. [Campo de velocidades] (propuesto)
Considere el campo de velocidades $\vec{v}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. **a)** Determine sus líneas de flujo. **b)** Calcule su divergencia y rotor. **c)** Transforme este campo de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

P3. [Divergencias, rotores, gradientes...]

a) Considere $\vec{F} = \big(3x^2y - 3x + e^x \operatorname{sen}(z)\big)\,\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + \big(e^x\cos(z) - 3x\big)\,\hat{k}$ y calcule su rotor y divergencia.

b) Demuestre que el rotor de $\vec{G} = yz\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + yx\hat{k}$ es $2x\hat{\imath} - 2z\hat{k}$.

c) Calcule ∇v para $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar tal que $v(x,y) = x^2 + y^2$.

P4. [Campos vectoriales y escalares]

a) Para $\vec{F} = -z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ ¿existe un campo escalar u tal que $\nabla u = \vec{F}$? ¿Y uno vectorial $\vec{G}$ tal que $\operatorname{rot}(\vec{G}) = \vec{F}$?

b) Para $\vec{F}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ ¿existe una función escalar $\varphi(x,y)$ definida en $\mathbb{R}^2$ tal que $\nabla\varphi = (ye^{xy}, xe^{xy})$?

P5. [Identidades vectoriales]
Sean $\vec{E}, \vec{B} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares, lo suficientemente diferenciables para que los operadores estén bien definidos. Demuestre las siguientes identidades:

a) $\nabla(fg) = f\nabla g + \nabla f g$

b) $\operatorname{div}(f\vec{E}) = \nabla f \cdot \vec{E} + f\operatorname{div}(\vec{E})$

c) **(propuesto)** $\operatorname{rot}(f\vec{B}) = \nabla f \times \vec{B} + f\operatorname{rot}(\vec{B})$

d) $\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

e) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

f) **(propuesto)** $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$

P6. [Aplicaciones]
Según las leyes de Maxwell sobre electromagnetismo, en un medio de permitividad ϵ y permeabilidad μ, los campos eléctrico $\vec{E}$, magnético $\vec{B}$, de desplazamiento $\vec{D}$ e intensidad magnética $\vec{H}$ son vectoriales y se relacionan por las ecuaciones $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\nabla \times E = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y $\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, donde los operadores diferenciales se calculan sobre las variables espaciales. Demuestre que se satisface $\nabla^2\vec{E} = \epsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ y $\nabla^2\vec{H} = \epsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$ cuando todos los campos son solenoidales (esto ocurre en particular en regiones del espacio donde no hay carga eléctrica). Para esto, le podría ser útil probar que $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}(\vec{A})\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$ para $\vec{A}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$.

[1] Visualizar en: `https://www.geogebra.org/m/QPE4PaDZ` y `https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+a+vector+fieldlang=es`.

Principales definiciones

- **[Campo Escalar]:** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es campo escalar, para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío.

- **[Campo Vectorial]:**$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es campo vectorial, para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. También se puede entender como un vector con campos escalares en sus entradas; formalmente: $\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{x})e_i$ con $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ campos escalares tal que $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $\forall i \in [1..n]$. (Usualmente, $n = 2$ o $n = 3$).

- **[Divergencia]**: Sea $\vec{F} = F_1\hat{x}+F_2\hat{y}+F_3\hat{z}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Su divergencia es un campo escalar y se define por $\operatorname{div}(\vec{F}) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

- **[Rotor]**: Sea $\vec{F} = F_1\hat{x} + F_2\hat{y} + F_3\hat{z}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Su rotor es un campo vectorial y su expresión se puede obtener de:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- **[Gradiente de un campo escalar]**: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^1$, el gradiente de f es un campo vectorial y se define por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

- **[Laplaciano]**: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como $\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$. Para $\vec{F}$ un campo vectorial, al menos $\mathcal{C}^2$, se define su laplaciano por coordenadas: $\Delta(\vec{F}) = \Delta F_1\hat{x} + \Delta F_2\hat{y} + \Delta F_3\hat{z}$.

- **[Solenoidal]**: Un campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^1 se dice solenoidal si $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$.

- **[Irrotacional]**: Un campo vectorial $\vec{F}$ de clase C^1 se dice irrotacional si $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

- **[Línea de flujo]**: Dado un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable, una línea de flujo es una curva $\vec{r}(t)$ que satisface:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$