Auxiliar # 3

Resolución de sistemas lineales C1 e Inversa.

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Marcelo Zamorano

P1.- Considere el sistema de 3×3.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & (\alpha-1)z & = 0 \\ 2x & + & (1-\alpha)y & + & z & = \beta \\ (\alpha+1)x & - & 4y & + & z & = \gamma \end{array}$$

Encuentre condiciones sobre los parámetros α, β, γ de modo que el sistema:

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & (1-\alpha) & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

y pruebe que para $\alpha = 7$ la matriz A es invertible.

P2.-

a) Invierta, de ser posible, las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Considere la matriz $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, con:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que si B es invertible, entonces $(a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$.

c) Demuestre que si la suma de los elementos en cada fila de una matriz invertible es k, entonces la suma de los elementos en cada fila de la inversa es $\frac{1}{k}$.

P3.-

a) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R}).$$

Calcule, escalonando, A^{-1}.

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matriz análoga a A pero de tamaño $n \times n$, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o bien } B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}.$$

Pruebe que B es invertible y que su inversa es la matriz $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ cuyos coeficientes están dados por:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j. \\ -1 & \text{si } i = j+1. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}.$$

P4.- [**Propuesto**] Considere el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con matriz aumentada dada por:

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 18 \\ 11 & -4 & -p^2 + p - 1 & 40 - p^2 + 5p \end{pmatrix},$$

donde p es un parámetro real. Encuentre todas las condiciones sobre p de modo que el sistema.

a) No tenga solución.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga solución única.

P5.- [**Propuesto**]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisfaga la condición:

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0.$$

Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$.

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible tal que satisfaga que $B^3 = 0$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $M(\alpha) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ por:

$$M(\alpha) = I + \alpha B + \frac{\alpha^2}{2} B^2.$$

(i) Pruebe que:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad M(\alpha + \beta) = M(\alpha) \cdot M(\beta).$$

y deduzca que $M(\beta) \cdot M(\alpha) = M(\alpha) \cdot M(\beta)$.

(ii) Pruebe que $M(\alpha)$ es invertible, y que $M(\alpha)^{-1} = M(-\alpha)$.