DESARROLLO AUX 11

VALORES Y VECTORES PROPIOS, Y DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

(P1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.l.

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v.p.}$ $\longrightarrow$ $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = 1$ v.p. (respectivam.)

(P1) a) Construir $T(v_1 - v_2)$

Idea: Usar la linealidad de la transformación! Esto pues se puede deducir la imagen por T de v_1, v_2 ya que son $\overrightarrow{v.p.}$: $T(v_i) = \mu_i v_i$, $i \in \{1,2\}$ $\rightarrow$ def. $\overrightarrow{v.p.}$

Por lo recién indicado, pues v_1, v_2 son $\overrightarrow{v.p.}$ de v.p. μ_1, μ_2, respectivamente, por definición:

* $T(v_1) = \mu_1 v_1 \iff T(v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \iff T(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

* $T(v_2) = \mu_2 v_2 \iff T(v_2) = 1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \iff T(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Por linealidad de T: $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2)$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{T(v_1 - v_2)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$, obteniendo lo pedido. $\blacksquare$

Bonus para (P3) c): $v_1 + v_2 =: w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

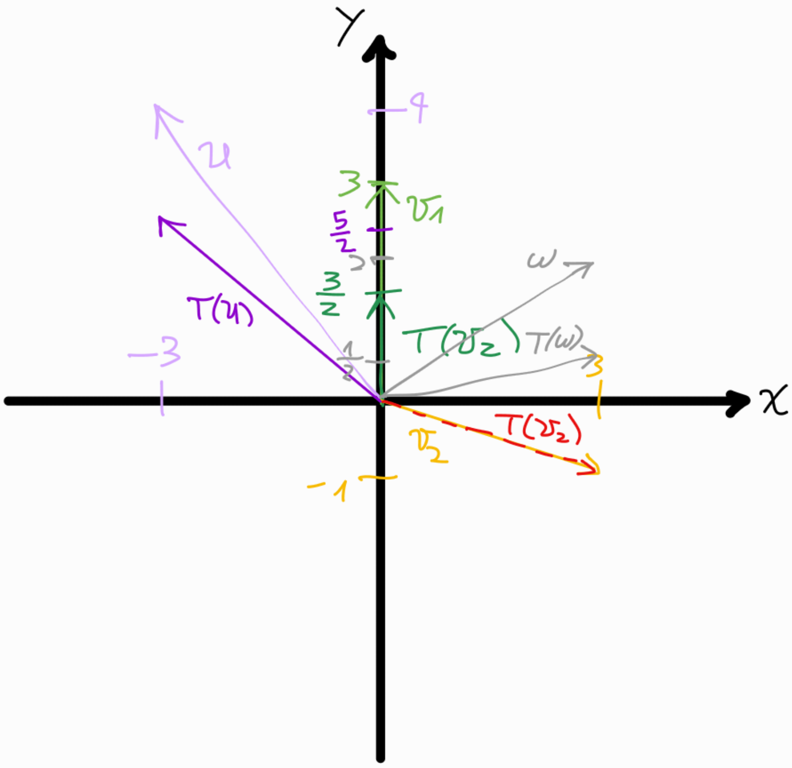
$$\iff T(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(P1) b) Dibujar cada vector y su imagen

Para hacerlo, se recuerda que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cong (x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

horizontal (abscisa)

vertical (ordenada)



$w = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} =: v_1 + v_2$

$T(w) = \begin{pmatrix}3\\1/2\end{pmatrix}$

no son paralelos

$\Rightarrow v_1 + v_2$ no es $\overrightarrow{v.p.}$

$v_1 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

$T(v_1) = \begin{pmatrix}0\\3/2\end{pmatrix}$

son paralelos

$\Rightarrow v_1$ es $\overrightarrow{v.p.}$

$v_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$T(v_2) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

son paralelos

$\Rightarrow v_2$ es $\overrightarrow{v.p.}$

$u := v_1 - v_2 = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

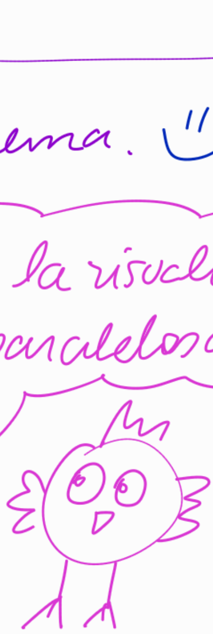
$T(u) = T(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix}-3\\5/2\end{pmatrix}$

no son paralelos!

$\Rightarrow v_1 - v_2$ no es $\overrightarrow{v.p.}$

(P1) c) Lo que se puede decir por el esquema. :)

En el fondo, la idea es reafirmar que la visualización en el plano de vectores propios es que sean paralelos a su imagen por la transformación lineal.

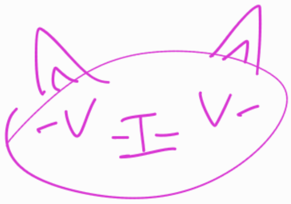


P_2

(P2) $\theta \in \mathbb{R}$; $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \equiv$ "matriz de rotación"

(P2) a) Explorar efecto de R para distintos θ sobre $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$

Idea: Se probará con $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ pues son ángulos para los cuales se conoce la forma de rotar un punto (x,y):



Rotaciones c/r al origen en

$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\boxed{(-y,x)}$	$\boxed{(-x,-y)}$	$\boxed{(y,-x)}$	$\boxed{(x,y)}$

Gatito mnemotécnico para acordarse de esto!

Si se llama de rotación, se espera que se obtengan esos resultados!

Siguiendo la idea:

* $R(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\frac{\pi}{2})\binom{x}{y} = \boxed{\binom{-y}{x}} \neq \mu\binom{x}{y}$, algún $\mu \in \mathbb{R}$

* $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\pi)\binom{x}{y} = \boxed{\binom{-x}{-y}} = -1\binom{x}{y}$

* $R(\frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(\frac{3\pi}{2})\binom{x}{y} = \boxed{\binom{y}{-x}} \neq \mu\binom{x}{y}$, algún $\mu \in \mathbb{R}$

* $R(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(2\pi)\binom{x}{y} = \boxed{\binom{x}{y}} = 1\binom{x}{y}$

con esto ya se puede argumentar que $\theta \in \{\pi, 2\pi\}$ admiten $\overrightarrow{v.p.}$

P1 b) $\theta \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

Determinar en qué casos $R(\theta)$ admite $\overrightarrow{v.p.}$

es la justificación formal

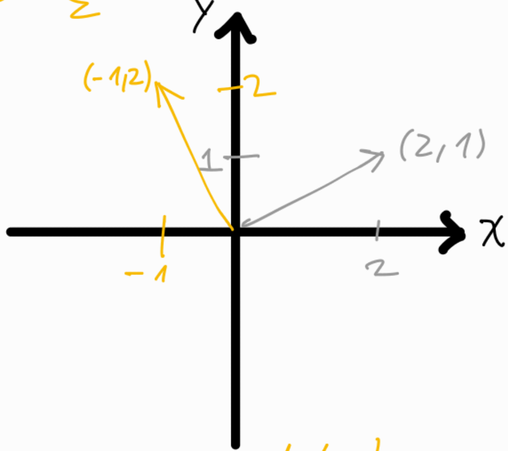
Idea: Verificarlo de manera gráfica!

Por definición: v es $\overrightarrow{v.p.}$ de A ssi $\underbrace{Av}_{\text{vector}} = \underbrace{\mu v}_{\text{vector ponderado}}, \overset{\overrightarrow{v.p.}}{\mu} \in \mathbb{R}$

Nuevamente (si la matriz es de 2x2) se chequea con la noción de ser paralelo

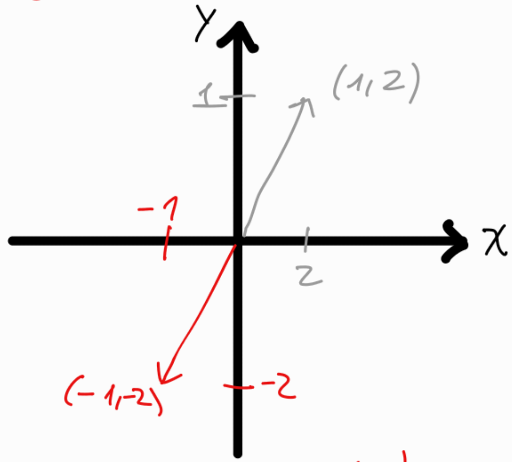
S.p.d.g. sean $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \Rightarrow \binom{x}{y}$ está en I cuadrante.

$\theta = \frac{\pi}{2}$



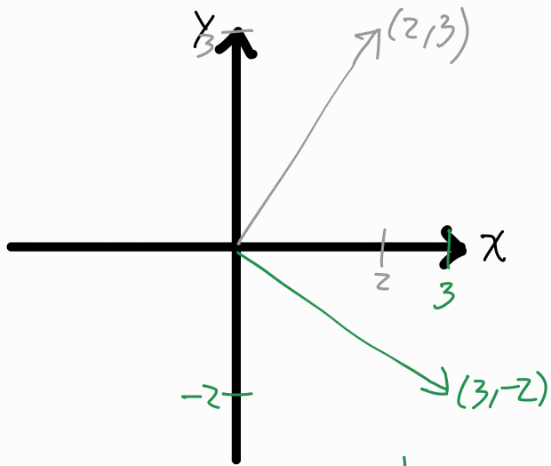
no son paralelos!

$\theta = \pi$



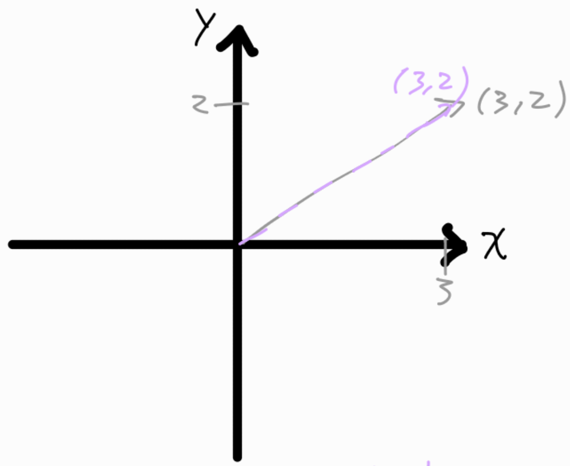
Sí son paralelos!
$\Rightarrow$ hay $\overrightarrow{v.p.}$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$



no son paralelos!

$\theta = 2\pi$



Sí son paralelos!
$\Rightarrow$ hay $\overrightarrow{v.p.}$

P_3

(P3) a) $\mathcal{H} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ matriz diagonalizable

$1 \in \mathbb{R}$ es su único $\vec{v}.p.$

P.D.Q. $\mathcal{H} = I_n$

Idea: Usar descomposición matricial de diagonalizable, porque induye a los $\vec{v}.p.$ y en este caso se conocen!

Por def., A diagonalizable $\Rightarrow A = PDP^{-1}$, algún $P, D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

P: invertible ($\vec{v}.p.$) D: diagonal ($\vec{v}.p.$)

En efecto,

Como $\mathcal{H}$ es diagonalizable:

$$\mathcal{H} = \underbrace{P}_{\text{invertible}}\underbrace{D}_{\text{diagonal}}P^{-1} = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n\right)\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \ \mu_n \end{pmatrix}\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n\right)^{-1}$$

$\Rightarrow \exists P^{-1} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ t.q. $P^{-1}P = I_n = PP^{-1}$

$$= \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}}_{\text{es la identidad!}}\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n\right)^{-1}$$

pues 1 es el único $\vec{v}.p.$

volviendo a la notación de P

$$= PI_nP^{-1}$$

$$= PP^{-1}$$

P es invertible

$$= I_n$$

Por transitividad, $\mathcal{H} = I_n$, demostrando lo pedido. $\blacksquare$

P3 b) A matriz diagonalizable

$A^k = 0$, algún $k \in \mathbb{N}$

P.D.Q. $A = 0_{n,n} \equiv$ "matriz nula"

Idea: Usar descomposición matricial de diagonalizable pues se tiene información sobre potencia k-ésima, y las diagonales (como la de la descomposición) son sencillas de potenciar.

En efecto,

Como A es diagonalizable $\Rightarrow A = PDP^{-1}$, algún $\underset{\text{invertible}}{P}, \underset{\text{diagonal}}{D}$ matrices

$$\Rightarrow A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})\cdots}_{I}\underbrace{\cdot(P}_{I}DP^{-1})}_{k \text{ veces}} = P\underbrace{DDD\cdots D}_{k \text{ veces}}P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} //$$

Pero $A^k = 0$ por hipótesis $\Rightarrow PD^kP^{-1} = 0$

$$\Rightarrow \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n\right)\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \; \mu_n \end{pmatrix}\left(v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n\right)^{-1} = 0$$

con $\underbrace{\{v_i\}_{i=1}^n \ \vec{v.p.}}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ v.p.

$\Rightarrow v_i \neq 0 \ \forall i \in [1..n] \Rightarrow \underbrace{P \neq 0 \neq P^{-1}}$

esto también se puede deducir de que P es invertible

$$\Rightarrow D^k = 0 \Rightarrow d_{ii} = 0 \ \forall i \in [1..n]$$
$$\Leftrightarrow \mu_i = 0 \ \forall i \in [1..n]$$
$$\Rightarrow D = 0$$
$$\Rightarrow PDP^{-1} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \ \blacksquare$$

(P3) c) $J \in M_{nn}(\mathbb{R})$

$\underbrace{J = J^2}$

P.D.Q. $0, 1$ son los únicos v.p.

Idea: Usar la definición de ser $\vec{v.p.}$ y v.p., suponiendo que admite valores propios, y concluir que deben ser 0 o 1

En efecto,

Si μ es v.p. de $J \Rightarrow \boxed{Jv = \mu v}$, algún $v \neq 0$ $\vec{v.p.}$

$$\Rightarrow J^2 v = J\mu v$$

A.

$$\Leftrightarrow \underbrace{J^2}_{\substack{=J \\ \text{hipótesis}}} v = \mu \underbrace{\boxed{Jv}}_{=\mu v}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Jv} = \mu^2 v$$

$$\Leftrightarrow \mu v = \mu^2 v$$

distributividad

$$\Leftrightarrow (\mu - \mu^2)v = 0$$

$$\Rightarrow \mu - \mu^2 = 0 \vee \underbrace{v = 0}_{\text{no puede ocurrir porque } v \text{ es } \vec{v.p.}}$$

$$\Rightarrow \mu - \mu^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu(1-\mu) = 0$$

$\Rightarrow \mu = 0 \vee \mu = 1$, concluyendo lo pedido. ■

P1 d) T matriz invertible $\Leftrightarrow \exists T^{-1}$ t.q. $TT^{-1} = I = T^{-1}T$

P.D.Q. μ es v̈.p. de $T \Rightarrow \mu^{-1}$ es v̈.p. de T^{-1}

Idea: De momento ha sido muy útil esta identidad:

$$\underbrace{T\vec{v}}_{\vec{v}.p.} = \underbrace{\mu}_{\ddot{v}.p.} v \quad (v \neq 0)$$

Porque se puede deducir los v̈.p., $\vec{v}$.p asociados. Entonces la idea es formar $T^{-1}v$ y estudiarlo.

En efecto,

Como μ es v̈.p. de $T \Rightarrow Tv = \mu v$, algún $v \neq 0$

$$T^{-1}\circ \quad \Longrightarrow T^{-1}Tv = T^{-1}\mu v$$

T invertible　　prop. matrices

$$\Longleftrightarrow Iv = \mu T^{-1} v$$

$$\Longleftrightarrow v = \mu T^{-1} v$$

Si se pudiera hacer: $\Longleftrightarrow \frac{1}{\mu} v = T^{-1} v$, se concluye.

Pero hay que justificar que $\mu \neq 0$ se tiene porque T es invertible

Luego, se tiene que $T^{-1}v = \frac{1}{\mu} v \Rightarrow \frac{1}{\mu}$ es v̈.p. de T^{-1} ∎

Propuesto

P3 e) S matriz

v_1, v_2 $\vec{v.p.}$ $\to$ μ_1, μ_2 $\ddot{v}.p.$ respect. $\mu_1 \neq \mu_2$

¿ $v_1 + v_2$ es $\vec{v.p.}$?

Idea: Suponer que lo fuese ¡Y ver qué pasa.

(La intuición de P1 dice que quizá no es)

Razonando hacia contradicción,

Supóngase $v_1 + v_2$ es $\vec{v.p.}$ de S

$$\Rightarrow S(v_1+v_2) = \beta(v_1+v_2), \text{ algún } \beta \in \mathbb{R} \text{ y } v_1+v_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow Sv_1 + Sv_2 = \beta v_1 + \beta v_2$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \beta v_1 + \beta v_2$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1 - \beta) v_1 + (\mu_2 - \beta) v_2 = 0$$

$\Rightarrow \mu_1 - \beta = 0 = \mu_2 - \beta$ pues v_1, v_2 son $\vec{v.p.}$ de $\neq \ddot{v}.p$

teorema

$\Rightarrow \mu_1 = \beta = \mu_2$ pues $\mu_1 \neq \mu_2$

Como se redujo a un absurdo, el supuesto es Falso y su negación es Verdadera. Sigue que $v_1 + v_2$ <u>no</u> puede ser $\vec{v.p.}$ de S, respondiendo lo pedido. $\blacksquare$

P4

P_4 a) $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow B_\beta := \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

P.D.Q. 1 es v.p. de B $(\forall \beta \in \mathbb{R})$

Idea: como se tiene la forma explícita de la matriz, se puede usar la caracterización de valor propio donde se aproveche esta info.:

μ es v.p. de B_β ssi $B_\beta - \mu I$ no es invertible
$\iff \det(B_\beta - \mu I) = 0$

En efecto,

Sea $\beta \in \mathbb{R}$.

Notar que $B_\beta - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \beta-1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Para ver si es invertible, se calculará su determinante.

$$\det(B_\beta - I) =: \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \beta-1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= + \beta - 1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (\beta - 1)(\underbrace{-2 - (-2)}_{=0}) = 0 \iff B_\beta - 1 \cdot I$ no es invertible

$\iff 1$ es v.p. de B_β ■

(P4) b) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mu = 3 \quad \overrightarrow{v.p.} \,/\, \ddot{v}.p.$$

Determinar α, β, γ explicitar

Idea: Usar nuevas una caracterización que permita usar la info de las entradas de la matriz

μ es $\ddot{v}$.p. es L ssi $Lv = \mu v$, algún $v \neq 0$

$$\iff (L - \mu I) v = 0$$

$$\iff \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

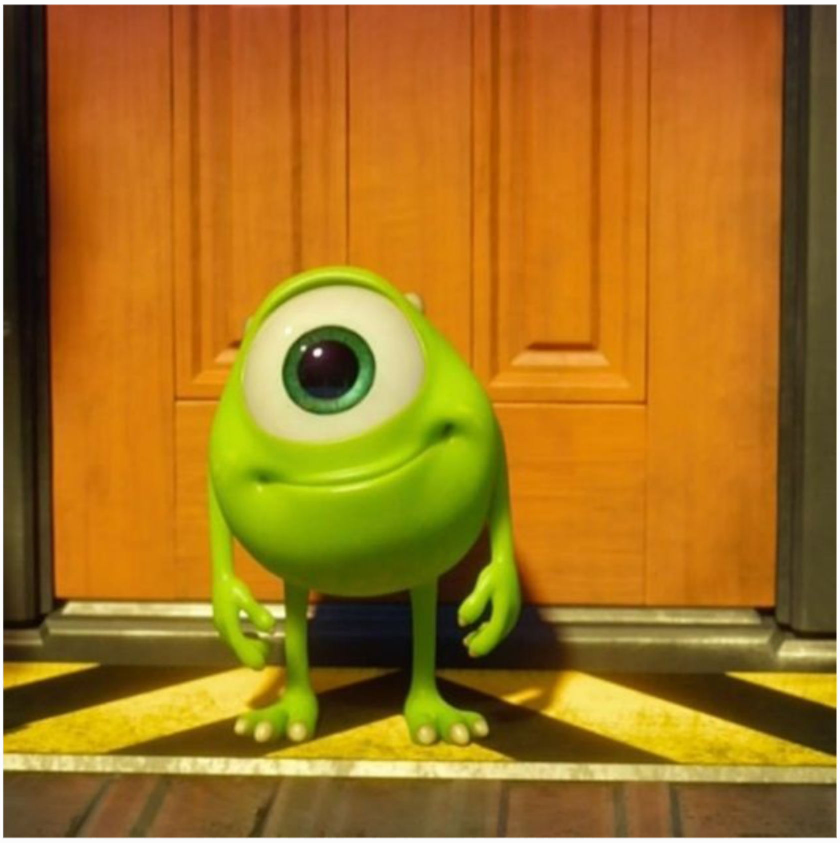
$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & \alpha \\ 2 & -2 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = -1 \quad \blacksquare$$

P4 c) Propuesto :)

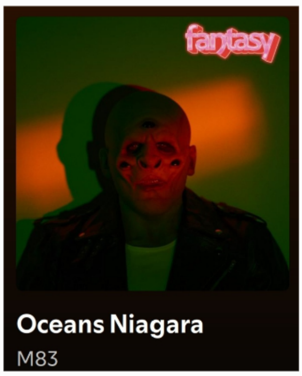
Pero la idea es seguir la intuición desarrollada en las preguntas anteriores, sobre la caracterización más adecuada.



Valores y vectores propios abre el estudio de la diagonalización de matrices!!! Y así comienza una de las últimas etapas del curso, que tiene distintas aplicaciones.

Si tienen dudas pueden escribirme/decirme, si nos vemos.

Éxito en su estudio


fantasy
Oceans Niagara
M83