Resumen C3

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

En el presente documento se tienen los principales resultados que deben manejar para el tercer control del curso (consideren que los contenidos son acumulativos, por lo que deben conocer la materia del primer control y del segundo). Recuerden que no solo importa conocer las definiciones, propiedades y teoremas, sino que también es necesario comprenderlas en profundidad y saber cómo aplicarlas. Confíen en sus conocimientos y éxito en su estudio (:

Les comparto la siguiente fotografía (así es, ¡una foto de la Tierra, desde el espacio!), obtenida de `aquí`, tomada hace más de 50 años por la tripulación de la misión Apolo 8 del programa espacial de EE.UU.; en particular, fue cercana a estas fechas, en la víspera de Navidad de 1968. En este imagen se captura la vista de nuestro planeta Tierra desde la Luna, y el vasto espacio que nos rodea; les invito a reflexionar otra vez sobre su lugar en el Universo...

Figura 1: Earthrise: Apollo 8 (1968)

Determinante de una matriz y sus propiedades

- **[Determinante]**: Sea A una matriz. Entonces:
  - **i)** Si A es de 1×1, $\det(A) = a_{11}$.
  - **ii)** Si A es de $n \times n$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i1})$.
  - **iii)** ~~Mejor aprender a calcularlo "visualmente" 8).~~
- **[Algunas propiedades de determinante]**: Sean A, B matrices cuadradas. Se tiene que:
  - $\det(A) \neq 0 \iff A$ es invertible.
  - $\det(A)$ no cambia después de aplicarle una operación elemental tipo $E_{p,q}$ (amplificar fila p y sumársela a fila q).
  - Al permutar filas de A, solo cambia el signo del determinante de A.
  - Si una matriz tiene una fila o columna nula, entonces su determinante es cero.
  - El determinante de un producto matricial es el producto de los determinantes. En particular el determinante del producto entre una matriz y su inversa es 1.
  - El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
  - El determinante de una matriz triangular superior (inferior) es el producto de los elementos de la diagonal. (En particular se cumple para matrices diagonales).

Valores y vectores propios, definiciones y propiedades

- **[Valores y vectores propios]**: Sea $L\colon V \to V$ una aplicación lineal sobre V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que $v \in V$ es un **vector propio** de L si y solo si:
  - **i)** $v \neq 0$
  - **ii)** $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : L(v) = \mu v$

  El escalar de **ii)** se denomina **valor propio**.

  Recordando que una aplicación lineal se puede representar por $v \mapsto Av$ con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces se dice que $v \in V \setminus \{0\}$ es **vector propio** de A si y solo si $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : Av = \mu v$.
- **[Caracterizaciones de valor propio]**: Considere $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la identidad en el mismo espacio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $\mu \in \mathbb{K}$ es valor propio de A.
  - $(\exists\ v \neq 0) : Av = \mu v$.
  - Existe $v \neq 0$ solución del sistema $(A - \mu I)v = 0$.
  - $W_\mu := \mathrm{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$.
  - $A - \mu I$ no es invertible.
  - $\det(A - \mu I) = 0$.
- **[Subespacio vectorial propio]**: Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, I la identidad en el mismo espacio y $\mu \in \mathbb{K}$, corresponde al núcleo de $A - \mu I$, y se denota por $W_\mu(A - \mu I)$.
- **[Polinomio característico]**: Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Su polinomio característico se define por:

$$p_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

  Luego μ es valor propio de A si y solo si μ es raíz de su polinomio característico.
- **[Multiplicidades]**: Sea $\beta \in \mathbb{K}$ un valor propio de la matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}$. La multiplicidad **geométrica** de β se denota por $\gamma_M(\beta)$ y corresponde a la dimensión de su subespacio vectorial propio. La multiplicidad **algebraica** de β se denota por $\alpha_M(\beta)$ y corresponde a la máxima potencia de su factor $(\mu - \beta)$ en el polinomio característico. Siempre se tiene que $1 \leq \gamma_M(\beta) \leq \alpha_M(\beta) \leq n$.
- **[Propiedades de valores y vectores propios]**:
  - Los valores propios de una matriz invertible siempre son distintos de cero.
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
  - Una matriz de $n \times n$ admite a lo más n valores propios distintos.
  - Si una matriz de $n \times n$ tiene a lo más n valores propios distintos, entonces es diagonalizable. La recíproca es falsa (pensar en ejemplo auxiliar 11).

Diagonalización de matrices

- **[Caracterizaciones de matriz diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sus valores y vectores propios asociados, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - A es diagonalizable.
  - A es similar a una matriz diagonal.
  - Existen P invertible y D diagonal matrices de $n \times n$ tales que $A = PDP^{-1}$, donde la columna i-ésima de P almacena el i-ésimo vector propio v_i, así como la entrada i, i-ésima de D almacena el i-ésimo valor propio, asociado a v_i.
  - Existe base de $\mathbb{R}^n$ por vectores propios de A.
  - La suma de las dimensiones de todos los subespacios vectoriales propios es n.
  - La multiplicidad geométrica y algebraica coinciden para cada valor propio.
  - Su polinomio característico de factoriza completamente en $\mathbb{R}$ en factores lineales y las multiplicidades coinciden para todo valor propio.

Ortonormalidad y matrices simétricas

- **[Producto punto]**: La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = x^T y$, es bilineal y conmuta.
- **[Normalizar]**: Un vector está **normalizado** si su norma, definida como la raíz cuadrada del producto punto consigo mismo, es 1.
- **[Ortogonalidad]**: Dos vectores son **ortogonales** si y solo si su producto punto resulta nulo.
- **[Matrices simétricas]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces se satisface lo siguiente:
  - A es diagonalizable.
  - La matriz P que almacena a los vectores propios de A es **ortogonal** o **unitaria** i.e. $P^{-1} = P^T$.
  - Los vectores propios de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos de A son ortogonales entre sí.