DESARROLLO AUX 14

GRAM-SCHMIDT Y DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES (SIMÉTRICAS)

MA1102-5
2024-2

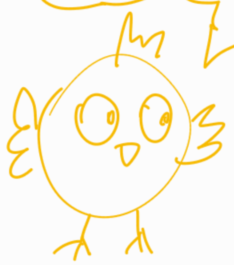
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 Encontrar base ortonormal del espacio generado por

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Base Ortonormal → Gram-Schmidt



El esquema general es:

0°) ordenar base de la cual se quiere hallar una base ortonormal que genere el mismo espacio en una "lista" $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

1°) Inicializar algoritmo con $\overline{U} = \langle \phi \rangle$, donde $\overline{U}$ es el espacio que se genera con los vectores ortonormalizados.

2°) Luego, para cada $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$:

I) definir vector para agregar:

$$u = v - \sum_{\overline{u} \in \overline{U}} P_{\overline{u}}(v)$$

u: vector para agregar

v: vector que tomé

restar la proyección de v sobre los anteriores ya agregados

$$P_{\overline{u}}(v) = \langle v, \overline{u} \rangle \overline{u}$$

II) normalizar: (primero calcular $\|u\|$)

$$\overline{u} = \frac{1}{\|u\|} u$$

III) agregar a la base:

$$\overline{U} = \langle \{u\} \rangle$$

3°) Termina cuando recorrimos toda la lista !!

Ahora se va a entender más con el ejercicios:

Usaré el orden sugerido en el enunciado: $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Se usa la norma de los vectores harto, así que calculémosla:

Def. [norma]: $(\forall v \in \mathbb{R}^n): \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$

- $\|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{(1\cdot1)+(1\cdot1)+(0\cdot0)+(0\cdot0)} = \sqrt{2}$ //

- $\|v_2\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{(2\cdot2)+(0\cdot0)+(1\cdot1)+(1\cdot1)} = \sqrt{6}$ //

- $\|v_3\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{((-2)\cdot(-2))+(4\cdot4)+(2\cdot2)+(2\cdot2)} = \sqrt{28}$ //

Ahora vamos con el algoritmo.
En virtud del Teorema de Gram-Schmidt, es posible extraer un conjunto ortonormal t.q. genera lo mismo.

$* \ \overline{U}_0 = \langle \emptyset \rangle$

como es la primera iteración, no hay vectores añadidos en el generador ortonormal, así que no hay vectores en los que proyectar

I) $* \ \boxed{u_1 = v_1} - 0$

II) $* \ \|u_1\| = \|v_1\| = \sqrt{2}$

$* \ \overline{u}_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ //

$* \ \overline{U}_1 = \langle \{\overline{u}_1\} \rangle$ //

Siguiente vector:

I) * $u_2 = v_2 - P_{\bar{u}_1}(v_1)$ proyección sobre vectores anteriores ya en U

$= v_2 - \langle v_1, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1$

$= v_2 - \langle v_1, \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \rangle \frac{1}{\|u_1\|} \bar{u}_1$

aprovechen factorizar!

$= v_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_1, \boxed{u_1} \rangle u_1$

⚠ si factorizan la norma, queda u_1 dentro, el que no está normalizado

Ojo: $\bar{u}_1 \neq u_1$ (en notación)

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left((1 \cdot 2) + \cancel{(1 \cdot 0)}^{0} + \cancel{(0 \cdot 1)}^{0} + \cancel{(0 \cdot 1)}^{0} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} //$$

II) * $\|u_2\| = \sqrt{\langle u_2, u_2 \rangle} = \sqrt{((-1)\cdot(-1)) + (1 \cdot 1) + ((-1)\cdot(-1)) + ((-1)\cdot(-1))} = \sqrt{4} = 2$

* $\bar{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} //$

III) * $\bar{U}_2 = \langle \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \} \rangle //$

Siguiente y último vector:

I) * $u_3 = v_3 - P_{\overline{u_2}}(v_3) - P_{\overline{u_1}}(v_3)$

$$= v_3 - \langle v_3, \overline{u_2}\rangle \overline{u_2} - \langle v_3, \overline{u_1}\rangle \overline{u_1}$$

$$= v_3 - \left\langle v_3, \frac{1}{\|u_2\|} u_2\right\rangle \frac{1}{\|u_2\|} u_2 - \left\langle v_3, \frac{1}{\|u_1\|} u_1\right\rangle \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

$$= v_3 - \frac{1}{\|u_2\|^2}\langle v_3, u_2\rangle u_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2}\langle v_3, u_1\rangle u_1$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2^2}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

reescribir v_3 y usar que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ bilineal

$$= 2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 2\left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\overbrace{((-1)\cdot(-1) + (2\cdot 1) + (1\cdot(-1)) + (1\cdot(-1)))}^{=1}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \underbrace{\sqrt{-1+2}}_{1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/2\\5/2\\5/2\\5/2\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

II) * $\|u_3\| = \sqrt{\langle u_3, u_3\rangle} = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}\left((-1)^2+1^2+1^2+1^2\right)} = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot 4} = 5$ //

* $\overline{u_3} = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

III) * $\overline{U_3} = \langle\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}\rangle = \left\langle\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

Es útil checar que sea ortogonal (i.e. el producto punto es cero para todas las duplas posibles) y están normalizados.

Como ya se recorrió todo $\{v_1, v_2, v_3\}$, termina el algoritmo, y Gram-Schmidt entrega la base ortonormalizada

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}. \blacksquare$$

P2

P2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ } Hay que estudiarlas. (B la dejo propuesta !! pero es análogo).

a) Justificar porqué es diagonalizable

Resultado importante: matrices simétricas siempre son diagonalizables !! :)

A es diagonalizable pues es simétrica.

b) Indicar forma de la diagonalización

Continuación del resultado: la diagonalización de una matriz simétrica admite a la matriz que almacena vectores propios como una unitaria $P^{-1} = P^T$

P: vectores propios ortonormales

Como A es simétrica $\Rightarrow A = PDP^{-1}$

$= PDP^T$ //

c) Diagonalizar siguiendo el esquema:

i) Obtener expresión de polinomio característico

ii) Determinar valores propios de la matriz.
↳ Mencionar su multiplicidad geométrica

iii) Calcular s.e.v. propio de cada v.p.
↳ Determinar $\vec{v.p.}$ de cada v.p.

iv) Obtener base de $\vec{v.p.}$
↳ Ortonormalizarla (Gram-Schmidt)

v) Exhibir diagonalización de la matriz

i) polinomio característico

- $$p_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 2-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\mu \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{def. recursiva}}{=} (2-\mu) \begin{vmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & -1 \\ 0 & -1 & 1-\mu \end{vmatrix}$$

$$= (2-\mu)(-\mu) \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ -1 & 1-\mu \end{vmatrix}$$

$$= (2-\mu)(-\mu)\left((1-\mu)^2 - (-1)(-1)\right)$$

$$= \cancel{-}(\mu-2)(\cancel{-}\mu)\left(\mu^2 - 2\mu \cancel{+1} \cancel{-1}\right)$$

$$= \mu(\mu-2)\mu(\mu-2)$$

$$= \mu^2(\mu-2)^2 \,//$$

ii) valores propios

μ es valor propio de $A \iff p_A(\mu) = 0$

$$\iff \mu^2 = 0 \vee (\mu-2)^2 = 0$$

$$\iff \underbrace{\mu = 0}_{=:\mu_0} \vee \underbrace{\mu = 2}_{=:\mu_2}$$

$* \ \alpha(\mu_0) = 2 = \alpha(\mu_2) \leftarrow$ multiplicidades algebraicas

iv) s.e.v.'s propios

El s.e.v. propio de un valor propio β es $W_\beta := \operatorname{Ker}(A-\beta I)$. Entonces para estudiarlo y ver qué vectores lo generan (más aún, encontrar una base), hay que caracterizar a los objetos del conjunto.

μ_0 | $\operatorname{Ker}(\underbrace{A-\mu_0 I}) =: W_{\mu_0}$

restar $\mu_0=0$ en toda la diagonal o sea queda igual (porque es restar cero)

$= \operatorname{Ker}(A)$

$\subseteq \mathbb{R}^4$ ← porque la matriz tiene 4 columnas

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_{\mu_0} \iff \vec{x} \in \operatorname{Ker}(A)$$

$$\iff A\vec{x} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix}$$

Recuerdo: nos interesa principalmente caracterizar los elementos, más que resolver el sistema de la forma más "óptima", entonces basta ir extrayendo info. de cada fila

①: $2x + 0y + 0z + 0w = 0 \Rightarrow x = 0$

③: $0x + 0y + z - w = 0 \Rightarrow z = w$ ④ aporta la misma info.

y queda libre. Entonces

$$\vec{x} \in W_{\mu_0} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{def. generador}}{\Longleftrightarrow} W_{\mu_0} = \left\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{además son l.i. (posición de ceros)}} \right\rangle$$

iv)

Luego: $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$ son $\overrightarrow{v.p.}$ de μ_0.

Son ortogonales: $\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle = (0\cdot 0)+(1\cdot 0)+(0\cdot 1)+(0\cdot 1)=0$

Pero no están normalizados, pues al ponderlos por su norma, no quedan ellos mismos.

u es vector
$\bar{u}$ es su normalización $\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{\|u\|} u \Rightarrow \|\bar{u}\| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$
$= \frac{1}{\|u\|^2} \langle u, u \rangle$

tener norma 1

$= \frac{1}{\|u\|^2} \|u\|^2 = 1$ //

- $\left\| \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \overline{\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}} \to \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$

↳ ya estaba normalizado

- $\left\| \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$

$\therefore \overline{\mathcal{B}}_{\mu_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$ es base ortonormal del s.e.v.p. //

μ_2 | $\mathrm{Ker}(\underbrace{A-\mu_2 I}_{\text{restar } \mu_2=2 \text{ a toda la diagonal}}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nuevamente solo es de interés caracterizar a los elementos dentro:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-\mu_2 I) \iff (A-\mu_2 I)\vec{x} = 0$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

(1): x libre

(2): $-2y = 0 \iff y = 0$

(3): $-z - w = 0 \iff z = -w$ (4)

Luego $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(A-\mu_2 I) \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -w \\ w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⚠ si usan $w = -z$ queda el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y es válido! También si factorizan por $-x$ y queda $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, también es válido; idem para w ó z.

iv)

$$\iff \left\langle \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{} \right\} \right\rangle = \mathrm{Ker}(A - \mu_2 I)$$

son l.i. (ubicación de ceros)

Por las mismas razones que en el otro caso, no están normalizados. De manera similar, se calculan las normas:

$$\therefore \mathcal{B}_{\mu_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ es base ortonormal de W_{μ_2} //

Ya que los $\vec{v.p.}$ de una matriz simétrica asociados a distintos v.p. son ortogonales, $B_{\mu_2} \perp B_{\mu_3}$. Y al mismo, se chequea que son l.i., y como efectivamente lo son, es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$

v) diagonalización

En virtud de lo anterior:

$$A = PDP^{-1} = PDP^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \blacksquare$$

P3

P3 $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+w=0 \right\}$

Determinar base ortonormal de V y de $V^\top$

Este ejercicio queda propuesto pero les daré algunas indicaciones:

* Base ortonormal (esta es la idea principal).

  1°) Obtener base usual

  2°) Usar Gram-Schmidt para obtener una ortonormal que genere al mismo espacio.

* Conjunto ortogonal: Para caracterizarlo, hay que usar su definición:

$$V^\perp := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U \}$$

todos los vectores que son ortogonales a los de dicho conjunto.

* Puede ser útil:

Reconocer sumas como producto punto! En particular:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle = x+y+z+w$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V \iff x+y+z+w=1 \iff \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} //$$

P4

(P4) $S \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ simétrica

$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v.p.}$, $S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Encontrar D, P t.q. $P^{-1} = P^T$ t.q. $S = PDP^T$

Como S es simétrica, por Teorema admite la descomposición que se busca encontrar, y entonces el problema se reduce a determinar una base ortonormal de $\overrightarrow{v.p.}$

Ya que la matriz es simétrica $\Rightarrow$ es diagonalizable, y cumple todas las caracterizaciones asociadas.

Notar que el enunciado aporta harta información para deducir $\overrightarrow{v.p.}$ y $\ddot{v}.p.$:

i) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v.p.}$ — prop.: $\overrightarrow{v.p.}$ de $\ddot{v}.p.$ distintos son ortogonales

ii) $S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ es $\overrightarrow{v.p.}$ de $\ddot{v}.p.$ $3 =: \mu_3$

iii) $S\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ es $\overrightarrow{v.p.}$ de $\ddot{v}.p.$ $0 =: \mu_0$

Notar que $\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = (-1\cdot 1) + (0\cdot 1) + (1\cdot 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ no son del mismo s.e.v.p.

$\therefore W_{\mu_3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $W_{\mu_0} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

Notar que $\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \right\}$ es base!

Ahora hay que ortonormalizar. Por Gram-Schmidt:

~~Ojo~~: Hay que cerciorarse de que sea base;

El procedimiento es: (algorítmico)

- $\overline{u}_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$; pues $\|\overline{u}_1\| = \left\| \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \right\| = \frac{1}{\|v_1\|} \|v_1\| = 1$

  elemento de la base O.N.

- $\overline{U}_1 = \{\overline{u}_1\}$ → lo que llevamos de la base O.N.

- $u_2 = v_2 - P_{\overline{u}_1}(v_2)$ proyección de v_2 sobre s.e.v. generado por u_1

  $= v_2 - \langle v_2, \overline{u}_1 \rangle \overline{u}_1$

- $\overline{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2$ ← normalizar

- $\overline{U}_2 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$

  ⋮

Conviene primero calcular las normas! (se usan harto)

- $\|v_1\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_{1i}^2} = \sqrt{2}$

- $\|v_2\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_{2i}^2} = \sqrt{2}$

- $\|v_3\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_{3i}^2} = \sqrt{3}$

Partimos:

- $u_1 = v_1$

- $\|u_1\| = \|v_1\| = \sqrt{2}$

- $\overline{u_1} = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$

$$\Rightarrow \overline{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} //$$

- $\overline{U_1} = \langle \{\overline{u_1}\} \rangle.$

– o –

- $u_2 = v_2 - P_{\overline{u}_1}(v_2)$

$$= v_2 - \langle v_2, \overline{u}_1 \rangle \overline{u}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} //$$

- $\|u_2\| = \sqrt{\langle u_2, u_2 \rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

- $\overline{u}_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} //$

- $U_2 = \langle \{ \overline{u}_1, \overline{u}_2 \} \rangle //$

— o —

- $u_3 = v_3 - P_{\overline{u}_2}(v_3) - P_{\overline{u}_1}(v_3)$

$$= v_3 - \langle v_3, \overline{u}_2 \rangle \overline{u}_2 - \langle v_3, \overline{u}_1 \rangle \overline{u}_1$$

$$= v_3 - \left\langle v_3, \frac{1}{\|u_2\|} u_2 \right\rangle \frac{1}{\|u_2\|} u_2 - \left\langle v_3, \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \right\rangle \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

$$= v_3 - \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle v_3, u_2 \rangle u_2 - \frac{1}{\|u_1\|^2} \langle v_3, u_1 \rangle u_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \cancelto{0}{\underbrace{(-1+2-1)}_{=0}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cancelto{0}{\underbrace{(-1+1)}_{=0}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

- $\|u_3\| = \sqrt{\langle u_3, u_3 \rangle} = \sqrt{3}$

- $\overline{u}_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\overline{U}_3 = \langle \{ \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3 \} \rangle$ //

—o—

Como ya se recorrieron todos los vectores de la lista:

$$\overline{U}_3 = \left\langle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

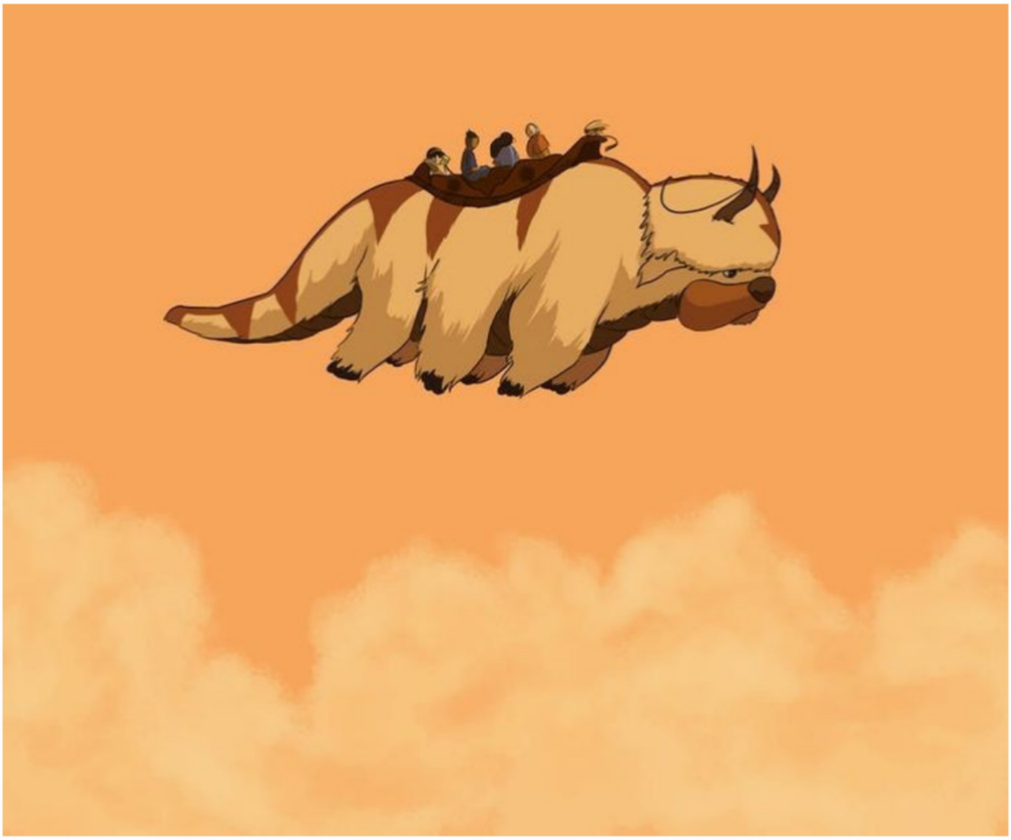
es base ortonormal de vectores propios de S.

En virtud de lo comentado antes: $S = PDP^T$, $P^{-1} = P^T$ de modo que:

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

⚠ recuerden incluir las constantes!!!

Hallando así las matrices pedidas. ■



Así finaliza el curso!

Ha sido un gran camino, el cual disfruté compartir con ustedes: verles madurar los contenidos, volverse más segur@s de sus argumentos y participación.

Gracias por su buena onda Sigan así, queriendo aprender y encontrando conexiones entre lineal y el resto de teoría...

Éxito en todo!

En esta época, siento
que los días suenan así :)