Auxiliar 13

Diagonalización de matrices y ortogonalidad

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 18 de noviembre de 2024

P1. [Multi]
Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Muestre que si $P = P^2$, entonces P es diagonalizable. Puede utilizar el resultado visto en un auxiliar pasado, donde se demostró que bajo las mismas hipótesis, la matriz solo admite valores propios 0 y 1.

P2. [Rescatando]
Considere la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ es vector propio de T y calcule su valor propio asociado.

b) Encuentre una base de vectores propios de T, sabiendo que 4 es un valor propio.

c) Determine el polinomio característico de T.

P3. [Reconstrucción]
Sea M de 3×3 matriz simétrica a valores reales. Se sabe que su polinomio característico es

$$p_M(\mu) = -\mu(\mu - 3)^2$$

y que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de M asociados al valor propio 3. Explicite la matriz M.

P4. [Otra mirada a valores y vectores propios]
Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ ortonormales (vale decir, $\langle u, v\rangle = 0$ y $\langle u, u\rangle = 1 = \langle v, v\rangle$, donde $\langle x, y\rangle = x^T y \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$). Se define la matriz simétrica de $n \times n$ dada por $A = uu^T + vv^T$.

a) Demuestre que si $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y w es ortogonal a u, v, entonces w es vector propio de A. Su valor propio es...

b) Pruebe que u, v son vectores propios de A, y determine sus respectivos valores propios.

c) Muestre que si $z \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado al valor propio $\mu \neq 0$, entonces $z \in \langle\{u, v\}\rangle$.

P5. [Más miradas]
Se define la matriz $J = xy^T \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos.

a) Demuestre que x es un vector propio de J.

b) Muestre que todo vector no nulo ortogonal a y también es vector propio de J.

Principales definiciones y propiedades

- **[Valores y vectores propios]**: Sea $L\colon V \to V$ una aplicación lineal sobre V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que $v \in V$ es un **vector propio** de L si y solo si:

  i) $v \neq 0$

  ii) $(\exists\, \mu \in \mathbb{K}) : L(v) = \mu v$

  El escalar de **ii)** se denomina **valor propio**.

  Recordando que una aplicación lineal se puede representar por $v \mapsto Av$ con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces se dice que $v \in V \setminus \{0\}$ es **vector propio** de A si y solo si $(\exists\, \mu \in \mathbb{K}) : Av = \mu v$.

- **[Caracterización de valor propio]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $\mu \in \mathbb{K}$ es valor propio de A.
  - $(\exists\, v \neq 0) : Av = \mu v$.
  - Existe $v \neq 0$ solución del sistema $(A - \mu I)v = 0$.
  - $W_\mu := \mathrm{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$.
  - $A - \mu I$ no es invertible.
  - $\det(A - \mu I) = 0$.

- **[Subespacio vectorial propio]**: Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, I la identidad en el mismo espacio y $\mu \in \mathbb{K}$, corresponde al núcleo de $A - \mu I$, y se denota por $W_\mu(A - \mu I)$.

- **[Polinomio característico]**: Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Su polinomio característico se define por:

$$p_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

  Luego μ es valor propio de A si y solo si μ es raíz de su polinomio característico.

- **[Multiplicidades]**: Sea $\beta \in \mathbb{K}$ un valor propio de la matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}$. La multiplicidad **geométrica** de β se denota por $\gamma_M(\beta)$ y corresponde a la dimensión de su subespacio vectorial propio. La multiplicidad **algebraica** de β se denota por $\alpha_M(\beta)$ y corresponde a la máxima potencia de su factor $(\mu - \beta)$ en el polinomio característico. Siempre se tiene que $1 \leq \gamma_M(\beta) \leq \alpha_M(\beta) \leq n$.

- **[Propiedades de valores y vectores propios]**:
  - Los valores propios de una matriz invertible siempre son distintos de cero.
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
  - Una matriz de $n \times n$ admite a lo más n valores propios distintos.
  - Si una matriz de $n \times n$ tiene a lo más n valores propios distintos, entonces es diagonalizable. La recíproca es falsa (pensar en ejemplo auxiliar 11).

- **[Caracterizaciones de matriz diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sus valores y vectores propios asociados, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - A es diagonalizable.
  - A es similar a una matriz diagonal.
  - Existen P invertible y D diagonal matrices de $n \times n$ tales que $A = PDP^{-1}$, donde la columna i-ésima de P almacena el i-ésimo vector propio v_i, así como la entrada i,i-ésima de D almacena el i-ésimo valor propio, asociado a v_i.
  - Existe base de $\mathbb{R}^n$ por vectores propios de A.
  - La suma de las dimensiones de todos los subespacios vectoriales propios es n.
  - Su polinomio característico de factoriza completamente en $\mathbb{R}$ en factores lineales y las multiplicidades coinciden para todo valor propio.