Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-5 Álgebra Lineal · Primavera 2024

Auxiliar 12

Polinomio característico y diagonalización de matrices

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 11 de noviembre de 2024

P1. [Flashbacks]

Para $\beta \in \mathbb{R}$ se define la matriz $B_\beta := \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Use un método distinto al del auxiliar anterior para:

a) Probar que 1 es valor propio de B para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

b) Determinar los valores de β tal que la matriz B admite valores propios no negativos.

P2. [Caracterizando]

Considere la matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\mu_3 = 3$ y $\mu_{-3} = -3$ son sus únicos valores propios:

a) Determine el polinomio característico de J

b) Encuentre una base de vectores propios de J.

P3. [Aclimatando]

Se tiene la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 15 & -14 & 25 \\ 9 & -9 & 16 \end{pmatrix}$ para la cual 1 y 4 son valores propios. Demuestre que C es diagonalizable.

P4. [Estudiando]

Considere la matriz $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcule sus valores propios.

b) Determine los subespacios propios asociados a cada valor propio.

c) Justifique si es diagonalizable; de serlo, calcule las matrices P y D tal que admita la escritura PDP^{-1}.

d) Estudie la invertibilidad de la matriz. En caso de que sea invertible, calcule su matriz inversa.

e) Calcule su potencia n-ésima.

P5. [Más estudio]

Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y repita las pasos de la pregunta anterior.

P6. [Determinista]
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que A es invertible. Muestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

Principales definiciones y propiedades

- **[Valores y vectores propios]**: Sea $L\colon V \to V$ una aplicación lineal sobre V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que $v \in V$ es un **vector propio** de L si y solo si:

  i) $v \neq 0$

  ii) $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : L(v) = \mu v$

  El escalar de **ii)** se denomina **valor propio**.

  Recordando que una aplicación lineal se puede representar por $v \mapsto Av$ con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces se dice que $v \in V \setminus \{0\}$ es **vector propio** de A si y solo si $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : Av = \mu v$.

- **[Caracterización de valor propio]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $\mu \in \mathbb{K}$ es valor propio de A.
  - $(\exists\ v \neq 0) : Av = \mu v$.
  - Existe $v \neq 0$ solución del sistema $(A - \mu I)v = 0$.
  - $W_\mu := \mathrm{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$.
  - $A - \mu I$ no es invertible.
  - $\det(A - \mu I) = 0$.

- **[Subespacio vectorial propio]**: Para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, I la identidad en el mismo espacio y $\mu \in \mathbb{K}$, corresponde al núcleo de $A - \mu I$, y se denota por $W_\mu(A - \mu I)$.

- **[Propiedades de valores y vectores propios]**:
  - Los valores propios de una matriz invertible siempre son distintos de cero.
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
  - Una matriz de $n \times n$ admite a lo más n valores propios distintos.
  - Si una matriz de $n \times n$ tiene a lo más n valores propios distintos, entonces es diagonalizable. La recíproca es falsa (pensar en ejemplo auxiliar 11).

- **[Caracterizaciones de matriz diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sus valores y vectores propios asociados, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - A es diagonalizable.
  - A es similar a una matriz diagonal.
  - Existen P invertible y D diagonal matrices de $n \times n$ tales que $A = PDP^{-1}$, donde la columna i-ésima de P almacena el i-ésimo vector propio v_i, así como la entrada i, i-ésima de D almacena el i-ésimo valor propio, asociado a v_i.
  - Existe base de $\mathbb{R}^n$ por vectores propios de A.
  - La suma de las dimensiones de todos los subespacios vectoriales propios es n.

- **[Determinante]**: Sea A una matriz. Entonces:

  i) Si A es de 1×1, $\det(A) = a_{11}$.

  ii) Si A es de $n \times n$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i1})$.

  iii) ~~Mejor aprender a calcularlo “visualmente” 8).~~

- **[Algunas propiedades de determinante]**: Sean A, B matrices cuadradas. Se tiene que:
  - $\det(A) \neq 0 \iff A$ es invertible.
  - $\det(A)$ no cambia después de aplicarle una operación elemental tipo $E_{p,q}$ (amplificar fila p y sumársela a fila q).
  - Al permutar filas de A, solo cambia el signo del determinante de A.
  - Si una matriz tiene una fila o columna nula, entonces su determinante es cero.
  - El determinante de un producto matricial es el producto de los determinantes. En particular el determinante del producto entre una matriz y su inversa es 1.
  - El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
  - El determinante de una matriz triangular superior (inferior) es el producto de los elementos de la diagonal. (En particular se cumple para matrices diagonales).

- **[Polinomio característico]**: Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ e I la matriz identidad en el mismo espacio. Su polinomio característico se define por:

$$p_A(\mu) = \det(A - \mu I)$$

  Luego μ es valor propio de A si y solo si μ es raíz de su polinomio característico.