Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-5 Álgebra Lineal · Primavera 2024

Auxiliar 11

Primer acercamiento a valores y vectores propios, y diagonalización de matrices

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 4 de noviembre de 2024

P1. [Dibujando]

Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal que admite como vectores propios a los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ de valores propios $\frac{1}{2}$ y 1, respectivamente.

a) Construya la imagen por T del vector $v_1 - v_2$.

b) Dibuje en el plano cartesiano cada vector y su imagen.

c) ¿Qué puede decir sobre v_1, v_2 y $v_1 - v_2$? Argumente según el esquema.

P2. [Explorar]

Para $\theta \in \mathbb{R}$ se define la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

a) Explore el efecto de la matriz para el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con distintos ángulos θ.

b) Considere los ángulos $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ y determine en qué casos $R(\theta)$ admite vectores propios.

P3. [Propiamente tal]

a) Suponga que $H \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tiene solo un valor propio igual a 1 y que además es diagonalizable. Demuestre que $H = I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

b) A es matriz diagonalizable tal que existe $k \in \mathbb{N}$ de mod que $A^k = 0$. Concluya que A debe ser la matriz nula.

c) Sea $J \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ tal que $J = J^2$. Muestre que los únicos valores propios de J son 0 y 1.

d) Considere T matriz invertible. Demuestre que los recíprocos de sus valores propios son valores propios de T^{-1}.

e) Se tienen los vectores propios v_1, v_2 de la matriz S, asociados a valores propios diferentes. Decida si $v_1 + v_2$ puede ser vector propio de S.

P4. [De forma concreta]

a) Para $\beta \in \mathbb{R}$ se define la matriz $B_\beta := \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Pruebe que 1 es valor propio de B para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

b) Determine los valores de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ en $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 2 & 2 & \gamma \end{pmatrix}$, si $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ es vector propio de valor propio 3.

c) Muestre que $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 15 & -14 & 25 \\ 9 & -9 & 16 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, sabiendo que 1 y 4 son los valores propios asociados.

Principales definiciones y propiedades

- **[Valores y vectores propios]**: Sea $L\colon V \to V$ una aplicación lineal sobre V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se dice que $v \in V$ es un **vector propio** de L si y solo si:

  i) $v \neq 0$

  ii) $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : L(v) = \mu v$

  El escalar de **ii)** se denomina **valor propio**.

  Recordando que una aplicación lineal se puede representar por $v \mapsto Av$ con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces se dice que $v \in V \setminus \{0\}$ es **vector propio** de A si y solo si $(\exists\ \mu \in \mathbb{K}) : Av = \mu v$.

- **[Caracterización de valor propio]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ y I la matriz identidad en el mismo espacio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $\mu \in \mathbb{K}$ es valor propio de A.
  - $(\exists\ v \neq 0) : Av = \mu v$.
  - Existe $v \neq 0$ solución del sistema $(A - \mu I)v = 0$.
  - $\mathrm{Ker}(A - \mu I) \neq \{0\}$.
  - $A - \mu I$ no es invertible.

- **[Spoilers de valores y vectores propios]**:
  - Los valores propios de una matriz invertible siempre son distintos de cero.
  - Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

- **[Caracterizaciones de matriz diagonalizable]**: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ y $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sus valores y vectores propios asociados, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - A es diagonalizable.
  - A es similar a una matriz diagonal.
  - Existen P invertible y D diagonal matrices de $n \times n$ tales que $A = PDP^{-1}$, donde la columna i-ésima de P almacena el i-ésimo vector propio v_i, así como la entrada i, i-ésima de D almacena el i-ésimo valor propio, asociado a v_i.
  - Existe base de $\mathbb{R}^n$ por vectores propios de A.

- **[Determinante]**: Sea A una matriz. Entonces:

  i) Si A es de 1×1, $\det(A) = a_{11}$.

  ii) Si A es de $n \times n$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A^{i1})$.

  iii) ~~Mejor aprender a calcularlo "visualmente" 8).~~

- **[Algunas propiedades de determinante]**: Sea A una matriz cuadrada. Se tiene que:
  - $\det(A) \neq 0 \iff A$ es invertible.
  - $\det(A)$ no cambia después de aplicarle una operación elemental tipo $E_{p,q}$ (amplificar fila p y sumársela a fila q).
  - Al permutar filas de A, solo cambia el signo del determinante de A.