Auxiliar 10

Matriz representante de transformaciones lineales: composición y cambio de base

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 21 de octubre de 2024

P1. [Descomponiendo]

Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$, $\mathcal{A} = \{w_1, w_2, w_3, w_3\} \subseteq W$ bases de cada espacio, respectivamente. Se sabe que la transformación lineal $R\colon V \to W$ tiene la matriz representante:

$$[R]_{\mathcal{BA}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) De una expresión de $R(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en términos de w_1, w_2, w_3, w_4.

b) Demuestre que R es inyectiva.

c) Encuentre una base de la imagen de R.

P2. [Reciclaje y cambiando de base]

En el auxiliar pasado se estudió la aplicación lineal $M\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que le asocia $M(p(x)) = xp(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ a cada $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y se determinó que su matriz representante con respecto a las bases canónicas de cada espacio es $[M]_{\beta_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule ahora la matriz representante con respecto a las bases

$$\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2} := \{1, x-1, (x-1)^2\} \subseteq \mathcal{P}_2 \qquad \tilde{\beta}_{\mathcal{P}_3} := \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

P3. [Componiendo]

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+3y+3z \\ x+3y+6z \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Calcule su matriz representante con respecto a las bases β_1 y β_2 en la partida y llegada, respectivamente, con:

$$\beta_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \beta_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Justifique si T es invertible.

c) Considere $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ otra transformación lineal. Determine la matriz representante de N con respecto a las bases del punto anterior β_2 y β_2 en la partida y llegada, respectivamente, sabiendo que la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ corresponde a la matriz representante de la composición $N \circ T$ con respecto a las bases del punto anterior β_2 y β_1 en la llegada y partida, respectivamente.

P4. [¿Será?]

Considere las siguientes matrices:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comente si es que J y S pueden ser matrices representantes de una misma transformación lineal. ¿Podrían ser también representantes de una misma transformación lineal con respecto a distintas bases?

Principales definiciones y propiedades

- **[Consecuencias de desigualdad entre dimensiones]**: Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la dimensión de la partida es mayor que la llegada, no pueden ser inyectivas. Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la llegada es mayor que la partida, no pueden ser epiyectivas.

- **[Herencia en transformaciones lineales]**: Sean V, V' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con U, W subespacios vectoriales de V, y la transformación lineal $f\colon V \to V'$. Entonces:
  - *) $f(U)$ es subespacio vectorial de V'.
  - *) $f(U + W) = f(U) + f(W)$
  - *) $f(U \oplus W) = f(U) \oplus f(W)$ si f inyectiva.
  - *) $U \cap W = \{0\} \iff f(U) \cap f(W) = \{0\}$ si f inyectiva.
  - *) La imagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la partida es finito y linealmente independiente en la llegada siempre que f sea inyectiva.
  - *) La preimagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la llegada es finito y linealmente independiente en la partida.
  - *) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff f$ es inyectiva

- **[Matriz representante]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con β_U, β_V bases de cada espacio, respectivamente, y la transformación lineal $f\colon U \to V$. La matriz representante de f entre las bases β_U, β_V se denotará $[f]_{\beta_U\beta_V}$ ($[\text{función}]_{(\text{base de partida})(\text{base de llegada})}$), tiene tantas columnas como vectores en la base de la partida y tantas filas como vectores en la base de la llegada, y sus entradas por columnas están dadas por los ponderadores de los vectores de la base de la llegada tal que reescriben la imagen por f de cada vector de la base de la partida.
  - f es invertible si y solo si $[f]_{\beta U\beta_V}$ es matriz invertible, y entonces $[f^{-1}]_{\beta_U\beta_V} = [f]^{-1}_{\beta U\beta_V}$
  - Si $g\colon U \to V$ es transformación lineal y $\gamma \in \mathbb{K}$:
    - $[f + g]_{\beta_U\beta_V} = [f]_{\beta_U\beta_V} + [g]_{\beta_U\beta_V}$
    - $[\gamma f]_{\beta_U\beta_V} = \gamma[f]_{\beta_U\beta_V}$
  - Si $h\colon W \to U$ es transformación lineal y β_W es base de W, entonces la composición $f \circ h\colon U \to V$ es tal que: $[f \circ h]_{\beta_W\beta_V} = [f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [h]_{\beta_W\beta_U}$

- **[Imagen de vector como producto matricial]**: El producto matricial entre la matriz representantes con las coordenadas de un vector en la base de partida corresponde a las coordenadas en la base de llegada de la imagen del vector, por la transformación lineal.

$$[f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [v]_{\beta_U} = [f(v)]_{\beta_V}$$

- **[Cambio de base]**: Sea $f\colon U \to V$ transformación lineal. Sean $\beta_U, \hat{\beta}_U$ bases de U, $\beta_V, \hat{\beta}_V$ bases de V. Bajo la idea de que $\hat{\beta}$ son las nuevas bases con respecto a las cuales se quiere expresar la matriz representante, se tiene el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\beta}_U \subseteq U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \supseteq \hat{\beta}_V \\ \downarrow\uparrow I_U & & \downarrow\uparrow I_V \\ \beta_U \subseteq U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \supseteq \beta_V \end{array}$$

De lo anterior, se deduce que $f = I_V \circ f \circ I_U$ y por lo tanto se cumple que:

$$[f]_{\beta_U\beta_V} = [I_V]_{\hat{\beta}_V\beta_V} \cdot [f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [I_U]_{\hat{\beta}U\beta_U}$$