DESARROLLO AUX 9

INYECTIVIDAD, EPIYECTIVIDAD Y MATRIZ REPRESENTANTE DE TRANSFORMACIONES LINEALES

MA1102-5

2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.

Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

P1 $\begin{cases} T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \\ \quad p(x) \mapsto T(p(x)) = (x^2+x+1)\,p(x) \end{cases}$

P1 a) P.D.Q. T es lineal

Hay que ver que: def. de transformación lineal

$$(\forall\, p(x), q(x) \in P_2(\mathbb{R}))(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}): T(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha T(p(x)) + \beta T(q(x))$$

En efecto,

Sean $p(x), q(x) \in P_2(\mathbb{R})$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Luego: $T(\underbrace{\alpha p(x) + \beta q(x)}_{\text{es un polinomio}}) \overset{\text{def. } T(\cdot)}{=} (x^2+x+1)(\alpha p(x) + \beta q(x))$

conmutatividad y distributividad $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$= \alpha (x^2+x+1)\, p(x) + \beta (x^2+x+1)\, q(x)$$

$$= \alpha T(p(x)) + \beta T(q(x)) \quad \text{def. } T(\cdot)$$

$\therefore$ T es lineal $\blacksquare$

(P1) b) Estudiar núcleo, imagen.
Dar bases y concluir dimensión.

Idea: caracterizar los conjuntos y hallar bases con los métodos conocidos.

Núcleo

$$\mathrm{Ker}(T) := \{ p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \mid T(p(x)) = 0 \}$$

$$= \{ p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \mid (x^2+x+1)\,p(x) = 0 \}$$

polinomios no tienen divisores de cero

$$= \{ p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \mid x^2+x+1 = 0 \vee p(x) = 0 \}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Big|_{\substack{b=1\\a=1\\c=1}} = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

$\Rightarrow$ no toca el eje X

$\Rightarrow$ nunca es cero

$$= \{ p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) \mid p(x) = 0 \}$$

$$= \{0\} \;//\; \Leftrightarrow T \text{ es inyectiva}$$

$\Rightarrow \beta_{\mathrm{Ker}} := \{0\}$ es (única) base de $\mathrm{Ker}(T)$ //

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$ (por convención) //

$\hookrightarrow$ en virtud del Teorema Núcleo-Imagen:

$$\dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$\Leftrightarrow 3 = 0 + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3}_{\text{rango de } T} \;//$$

Imagen

$$\operatorname{Im}(T) := \{ q(x) \in P_5(\mathbb{R}) \mid (\exists\, p(x) \in P_2(\mathbb{R})) : T(p(x)) = q(x) \}$$

Y se puede seguir caracterizando, pero también se puede usar que T es inyectiva $\Rightarrow$ transforma l.i. en partida en l.i. en la llegada

Basta tomar base de partida, su imagen por T será un conjunto l.i., así que basta tomarlo de tamaño la dimensión de la imagen.

Por lo anterior:

$$\beta_{P_2(\mathbb{R})} := \{1, x, x^2\}$$

$$\Rightarrow T\left(\beta_{P_2(\mathbb{R})}\right) = \{T(1), T(x), T(x^2)\}$$
$$= \{x^2+x+1, (x^2+x+1)x, (x^2+x+1)x^2\}$$

es base de $\operatorname{Im}(T)$.

(P1) c) Estudiar inyectividad, epiyectividad.
¿Isomorfismo?

Idea: argumentar por dimensiones!

| T es transformación lineal |

- T inyectiva $\Rightarrow \dim(Dom(T)) \leq \dim(Cod(T))$
- T sobreyectiva $\Rightarrow \dim(Dom(T)) \geq \dim(Cod(T))$
- $\dim(Dom(T)) = \dim(Cod(T)) \Longrightarrow$ T inyectiva $\Longleftrightarrow$ T sobreyectiva $\Longleftrightarrow$ T biyectiva

Por caracterización: $Ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow T$ inyectiva //

Además: $\underbrace{r(T) = 3 < 4 = \dim(P_3(\mathbb{R}))}_{\text{"donde llega, "sobra""}} \Longrightarrow$ no es sobreyectiva

de hecho no podría serlo por la relación entre la dimensión de llegada y partida:

$$\dim(Cod(T)) = \dim(P_4(\mathbb{R})) = 5 > 3 = \dim(P_3(\mathbb{R})) = \dim(Dom(T))$$

P2

cantidad de vectores de partida

cantidad de vectores de llegada

coef que quedan

$f: U \to V$

β_U, β_V bases de U, V, respect.

$$[f]_{\beta_U \beta_V} = \left(f(u_1) \,\middle|\, f(u_2) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, f(u_m) \right)$$

$$\left([f]_{\beta_U \beta_V}\right)_{\cdot, j} = [f(v_j)]_{\beta_U}$$

P2

V e.v.

$\beta = \{u, v, w\}$ V-base

$T: V \to V$ transformación lineal que cumple:

$T(u) = v - w$ $\quad T(v) = u + v$ $\quad T(w) = u + 2v - w$

Determinar matriz representante de T

Idea:

Es necesario conocer la escritura de la imagen de los vectores de la base en la partida, por la transformación lineal, en términos de vectores de la base de la llegada.

[cuando no dicen c/r a cuál base la matriz, asumir la dada y/o la canónica]

Se conoce la acción de T sobre los vectores c/r a la base de la llegada y la partida! Por enunciado!

$T(u) = v - w = 0\cdot u + 1\cdot v + (-1) w$

$T(v) = u + v = 1\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w$

$T(w) = u + 2v - w = 1\cdot u + 2\cdot v + (-1)\cdot w$

Luego: $[T]_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ∎

las columnas de $[T]_{\beta\beta}$ son las coordenadas de $T(u), T(v), T(w)$ (la imagen de la base) en término de la base

P_3

P_3 a) $\begin{cases} M: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R}) \\ \quad p(x) \mapsto M(p(x)) = x\,p(x) \end{cases}$

Calcular matriz representante c/r a bases canónicas.

Idea: (again)

Es necesario conocer la escritura de la imagen de los vectores de la base en la partida, por la transformación lineal, en términos de vectores de la base de la llegada.

Notar que:

$$\beta_{P_2(\mathbb{R})} := \{1, x, x^2\} \subseteq P_2(\mathbb{R}) \quad , \quad \beta_{P_3(\mathbb{R})} := \{1, x, x^2, x^3\} \subseteq P_3(\mathbb{R})$$

son bases de la partida y llegada.

* $M(1) = x \cdot 1 = x$
$$= 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

* $M(x) = x \cdot x = x^2$
$$= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

* $M(x^2) = x \cdot x^2 = x^3$
$$= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3$$

luego $[T]_{\beta_{P_2(\mathbb{R})}\beta_{P_3(\mathbb{R})}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ▨

$\mathcal{P}_3$ b) $\begin{cases} R: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3) \mapsto R(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3) = \delta+\gamma x+\beta x^2+\alpha x^3 \end{cases}$

Calcular matriz representante de R c/r a $\mathcal{C} := \{1, x, x^2, x^3\}$

base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

Idea: la misma de antes !!

Se va a estudiar la imagen de los vectores de la base, por la transformación lineal, en términos de la base

$*$ $R(1) = R(1+0x+0x^2+0x^3) = \underbrace{0}_{=0\cdot 1}+0x+0x^2+1x^3$ //

$*$ $R(x) = R(0+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3) = \underbrace{0}_{=0\cdot 1}+0\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3$ //

$*$ $R(x^2) = R(0+0\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3) = \underbrace{0}_{=0\cdot 1}+1\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$ //

Luego $[R]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

P4

P4 a) $\begin{cases} D: \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \\ \quad A \mapsto D(A) = MA + AM \end{cases}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Determinar matriz representante de D c/r a la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =: \mathcal{H}$$

Idea: lo mismo jeje

Se procederá a escribir la imagen por D de los vectores de la base, en términos de dicha base.

Se puede caracterizar D:

Sea $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow MA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AM \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(A) = MA + AM = \begin{pmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{pmatrix}$$

Luego:

$* \; D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; *$$

$* \; D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; *$$

$* \; D\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; *$

$* \; D\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; *$

Así: $[D]_{\mathcal{H}\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

(P4) b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad Ker(f) = \Big\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}}_{=:\,\xi} \Big\rangle$$

(P4) b) i) Encontrar base núcleo, nulidad, rango

Idea: reducir generador a un conjunto l.i.

ξ ya genera ; ¿es l.i.?

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\1&3&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

es l.d.!

luego $\Big\langle \underbrace{\xi \setminus \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}}_{\tilde{\xi}\,:=} \Big\rangle = \langle \xi \rangle = Ker(f)$

propiedad de extraer l.d. en generador

Así $\tilde{\xi}$ es l.i. y genera $Ker(f)$

$\therefore\ \tilde{\xi}$ es base de $Ker(f)$; $|\tilde{\xi}| = 2 \Rightarrow \overbrace{dim(Ker(f)) = 2}^{\text{nulidad}}$ //

En virtud del Teorema Núcleo Imagen:

$$dim(\mathbb{R}^3) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2 + dim(Im(f))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 = dim(Im(f))}_{\text{rango}} \quad //$$

(P4) b) ii) Determinar $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$

Propuesto (: Es similar a un ejercicio del auxiliar 8 que hicimos (:

La respuesta es

$$\left(\forall \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right): f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\-x_2\\-x_2\\x_2\end{pmatrix}$$

(P4) b) iii) Calcular matriz representante de f c/r a las bases $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$

Idea: estudiar la imagen por la transformación lineal de los vectores de la base de la partida en términos de la base de la llegada.

En efecto:

$$* \; f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \,//$$

$$* \; f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \,/$$

Hay que enfrentarse a un sistema lineal en caso de que la comb. lineal no sea tan clara de observar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$\to \delta = -1$

$\gamma = 1$

$\beta = 0$

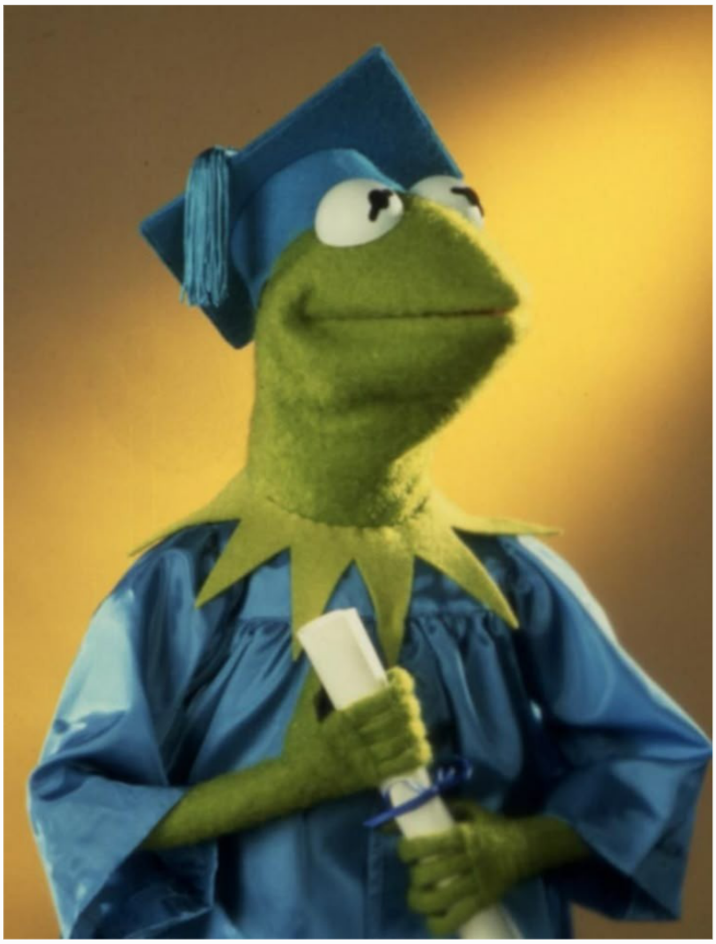
$\alpha = 0$

$$* \; f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \,//$$

Luego: $$[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \;\boxtimes$$

ustedes graduad@s en el
cálculo de matrices representantes
después de este auxiliar:



(Si quedan dudas pueden avisarme! ☺)

la portada es de
tonalidades verdes
como el color de
este aux