DESARROLLO AUX 8

TRANSFORMACIONES LINEALES, SU NÚCLEO E IMAGEN

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P1

P1 $\left\{ \begin{array}{l} T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{pmatrix} \end{array} \right.$ ← es un desplazamiento en cada coordenada

P1 a) P.D.Q. T es una transformación lineal

$$\Leftrightarrow (\forall\, u, v \in \mathbb{R}^4): T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$\wedge\ (\forall\, u \in \mathbb{R}^4)(\forall\, \beta \in \mathbb{R}): T(\beta u) = \beta T(u)$$

} se las dejo propuestas!

$$\Leftrightarrow (\forall\, u, v \in \mathbb{R}^4)(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}): T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

propiedad compacta (si quieren convencerse, demuestren la equivalencia, es buen ejercicio jeje)

Entonces la idea es proceder por definición

En efecto,

Sean $u, v \in \mathbb{R}^4$ arbitrarios, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$, algún $x_i, v_i \in \mathbb{R}$, $i \in [1..4]$

Se estudiará $T(\alpha + \beta v)$

$$= T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta v_1 \\ \alpha x_2 + \beta v_2 \\ \alpha x_3 + \beta v_3 \\ \alpha x_4 + \beta v_4 \end{pmatrix}$$ ← desarrollando el argumento

def. $T(\cdot)$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta v_1) - (\alpha x_2 + \beta v_2) \\ (\alpha x_2 + \beta v_2) - (\alpha x_3 + \beta v_3) \\ (\alpha x_3 + \beta v_3) - (\alpha x_4 + \beta v_4) \\ (\alpha x_4 + \beta v_4) - (\alpha x_1 + \beta v_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 - \alpha x_2) + (\beta v_1 - \beta v_2) \\ (\alpha x_2 - \alpha x_3) + (\beta v_2 - \beta v_3) \\ (\alpha x_3 - \alpha x_4) + (\beta v_3 - \beta v_4) \\ (\alpha x_4 - \alpha x_1) + (\beta v_4 - \beta v_1) \end{pmatrix}$$

reordenando términos por conmutatividad de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \alpha x_2 \\ \alpha x_2 - \alpha x_3 \\ \alpha x_3 - \alpha x_4 \\ \alpha x_4 - \alpha x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta v_1 - \beta v_2 \\ \beta v_2 - \beta v_3 \\ \beta v_3 - \beta v_4 \\ \beta v_4 - \beta v_1 \end{pmatrix}$$

operatoria de matrices

$$= \alpha \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 - v_3 \\ v_3 - v_4 \\ v_4 - v_1 \end{pmatrix}$$

factorizar escalar

$$= \alpha T(u) + \beta T(v)$$

def. $T(\cdot)$

Por transitividad, se concluye que $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ ∎

(P1) b) Estudiar Ker(T), Im(T).
núcleo, imagen

(P1) c) Encontrar bases y dimensiones

Idea: caracterizar los conjuntos!! y hacer lo que sabemos para encontrar bar

Núcleo

Por definición,

$$\text{Ker}(T) = \{x \in \text{Dom}(T) \mid T(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid T(x) = 0\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \wedge x_2 - x_3 = 0 \wedge x_3 - x_4 = 0 \wedge x_4 - x_1 = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 = x_4\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\langle \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \right\rangle \Rightarrow \beta_{Ker} := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$ es base de Ker(T) (genera y es l.i.);

es l.i.! (es un singleton)

como $|\beta_{Ker}| = 1 \Rightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 1$. □

Imagen

Por definición,

$$\operatorname{Im}(T) = \{ y \in \operatorname{Cod}(T) \mid (\exists x \in \operatorname{Dom}(T)) : T(x) = y \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R}^4 \mid (\exists x \in \mathbb{R}^4) : T(x) = y \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\right) : \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\right) : \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left(\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\right) : x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{para } x = (x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 \text{ fijo} \right\}$$

$$= \left\langle \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} \right\rangle$$

es l.d. pues:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} \right\rangle$$

se extrae usando propiedad.
W es l.d. $\Rightarrow \exists\, w \in W$ t.q. $\langle W \rangle = \langle W \setminus \{w\} \rangle$

es l.i.!
verlo con el método de escalonar

$\therefore\ \mathcal{B}_{\operatorname{Im}} := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\operatorname{Im}(T)$ (genera y es l.i.);

como $|\mathcal{B}_{\operatorname{Im}}| = 3 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$. □

P1 d) P.D.Q. $Ker(T) \oplus Im(T) = \mathbb{R}^4$ Propuesto :)

P_2

P2 $\begin{cases} J: P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto J(p(x)) = x^3 p'''(x) \end{cases}$

P2 a) P.D.Q. J es transformación lineal

$\iff (\forall p(x), q(x) \in P_5(x))(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}): J(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha J(p(x)) + \beta J(q(x))$

En efecto,
Sean $p(x), q(x) \in P_5(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Luego $J(\alpha p(x) + \beta q(x))$

$= x^3 (\alpha p(x) + \beta q(x))'''$ def. $J(\cdot)$

$= x^3 ([\alpha p(x)]''' + [\beta q(x)]''')$ derivada de suma

$= x^3 [\alpha p'''(x) + \beta q'''(x)]$ fact. de constante

$= \alpha x^3 p'''(x) + \beta x^3 q'''(x)$ distribución

$= \alpha J(p(x)) + \beta J(q(x))$ def. $J(\cdot)$

Por transitividad, $J(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha J(p(x)) + \beta J(q(x))$ i.e. J es lineal. $\boxtimes$

P2 b) Calcular $\ker(J)$, $\operatorname{Im}(J)$, y bases.

Núcleo

$$\ker(J) = \{ p(x) \in P_5(\mathbb{R}) \mid J(p(x)) = 0 \}$$

$$= \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \in P_5(\mathbb{R}) \mid x^3(6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2) = 0 \}$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4$$

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3$$

$$p'''(x) = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2$$

Luego $\langle \underbrace{\{1, x, x^2\}}_{\text{es l.i.}} \rangle = \ker(T)$

$\Rightarrow \beta_{\ker} = \{1, x, x^2\}$ es base de $\ker(T)$ (genera y es l.i.);

como $|\beta_{\ker}| = 3 \Rightarrow \dim(\ker(T)) = 3$.

Imagen

$$\operatorname{Im}(J) = \{ y \in P_5(\mathbb{R}) \mid (\exists\, p(x) \in P_5(\mathbb{R})) : y = J(p(x)) \}$$

Sea $y \in \operatorname{Im}(J)$

$\Rightarrow y = x^3 p'''(x) = J(p(x))$, algún $p(x) \in P_5(x)$

$\Rightarrow y = x^3(6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2)$

$\Rightarrow y = 6a_3x^3 + 24a_4x^4 + 60a_5x^5$

$\Rightarrow \langle \underbrace{\{x^3, x^4, x^5\}}_{\text{es l.i.}} \rangle = \operatorname{Im}(T) \Rightarrow \beta_{\operatorname{Im}} = \{x^3, x^4, x^5\}$ es base de $\operatorname{Im}(T)$ (genera y es l.i.),

como $|\beta_{\operatorname{Im}}| = 3 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(J)) = 3$.

P3

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Encontrar transformación lineal M t.q.

$$M(v_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad M(v_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad M(v_3) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Idea: usar linealidad de la función para encontrar sus valores.

$$\begin{cases} M: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M\left(\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

$$= M\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= xM\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + yM\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + zM\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

→ Aquí hay que ir a estudiar las hipótesis.

$$= x\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + zM\begin{pmatrix}7\\-1\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-4x\\x\\-3x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-y\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7z\\-z\\6z\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-4x - y + 7z\\ x + y - z\\ -3x + 6z\end{pmatrix} \quad \square$$

Por enunciado se tiene que:

- $M\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 1M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow M(e_1)+2M(e_2)+M(e_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

- $M\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -2M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-1M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -2M(e_1)+M(e_2)-M(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

- $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 1M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow M(e_1)+M(e_2)+M(e_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

De lo anterior se obtiene que:

$$M(e_1) + 2M(e_2) + M(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$-2M(e_1) + M(e_2) - M(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$M(e_1) + M(e_2) + M(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(2) + (3) : \quad -M(e_1) + 2M(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$(1) + (2) : \quad -M(e_1) + 3M(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(5) - (4) : \quad M(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{II}) \to (4) : \Rightarrow -M(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -M(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M(e_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \to (3) : \Rightarrow M(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(e_3) = \begin{pmatrix} 2+4+1 \\ 1-1-1 \\ 3+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(e_3) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{III})$$

(P4) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformación lineal
$L \circ L = L$

(P4) a) P.D.Q. $Ker(L) \cap Im(L) = \{0\}$

Igualdad de conjuntos $\longrightarrow$ Doble inclusión

Por doble inclusión,

$\supseteq$ | $\{0\} \subseteq Ker(L) \cap Im(L)$ se tiene pues como $Ker(L)$, $Im(L)$ son espacios vectoriales, siempre contienen al cero. $\square$

$\subseteq$ | $Ker(L) \cap Im(L) \subseteq \{0\}$

Sea $x \in Ker(L) \cap Im(L)$

$\Leftrightarrow x \in Ker(L) \wedge x \in Im(L)$

$\Leftrightarrow L(x) = 0 \wedge (\exists u \in \mathbb{R}^n): L(u) = x$

$\Rightarrow x = L(u) = L(L(u)) = L(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \{0\}$

$\therefore Ker(L) \cap Im(L) \subseteq \{0\}$ $\square$

Por lo anterior, se concluye que $Ker(L) \cap Im(L) = \{0\}$. $\blacksquare$

P4 b) P.D.Q. $\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$

Idea: Estudiar $\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$

En general,

$$
\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) - \cancelto{0}{\dim(\{0\})} \\
&= \dim(\mathbb{R}^n) = n \quad //
\end{aligned}
$$

en virtud del Teorema Núcleo Imagen, pues L es lineal y $\dim(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Por transitividad, se tiene que $\dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)) = n$. $\blacksquare$

P4 c) Concluir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Im}(L)$

Idea: usar la def.

En efecto,

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Im}(L)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(L) + \mathrm{Im}(L)}_{\text{falta verlo!}} \;\wedge\; \underbrace{\mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Im}(L) = \{0\}}_{\text{Ya se tiene por la parte anterior!}}$$

Notar que $\mathrm{Ker}(L) + \mathrm{Im}(L) \leq \mathbb{R}^n$.

Si se tuviera que $\dim(\mathrm{Ker}(L) + \mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathbb{R}^n)$

$\Longrightarrow \mathrm{Ker}(L) + \mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^n$ ■

- U es s.e.v. de V
- $\dim(U) = \dim(V)$

$\Rightarrow U = V$

P5

P5 U e.v.

P5 a) $J: U \to U$ $\underbrace{\text{lineal biyectiva}}^{\text{isomorfismo}}$

P.D.Q. J^{-1} lineal biyectiva

Idea: mostrar que cumple ambas

En efecto,

Como J es biyectiva $\Rightarrow \exists J^{-1}$ y es biyectiva. $\square$

Como J es lineal

$\Rightarrow (\forall u, v \in U)(\forall \beta \in \mathbb{R}): J(u+\beta v) = J(u) + \beta J(v)$

Se quiere ver que J^{-1} es lineal

$\Leftrightarrow (\forall u, v \in U)(\forall \gamma \in \mathbb{R}): J^{-1}(u+\gamma v) = J^{-1}(u) + \gamma J^{-1}(v)$

Sean $u, v \in U$, $\gamma \in \mathbb{R}$,

$\Rightarrow J^{-1}(u) = x$, algún $x \in U$

$J^{-1}(v) = y$, algún $y \in U$

Por linealidad de J, $J(x+\beta y) = J(x) + \beta J(y)$

$= J(J^{-1}(u)) + \beta J(J^{-1}(v))$

$= u + \beta v$

Así, $J(x+\beta y) = u + \beta v$

$\Leftrightarrow J^{-1}(J(x+\beta y)) = J^{-1}(u+\beta v)$

$\Leftrightarrow x + \beta y = J^{-1}(u+\beta v)$

$\Leftrightarrow J^{-1}(u) + \beta J^{-1}(v) = J^{-1}(u+\beta v)$ $\blacksquare$

P5 b) Def [t.l. semejantes $\sim$]

$T: U \to U$, $S: U \to U$ transformaç lineales

$T \sim U$ ssi $\exists J, L$ isomorfismos ; $T = J \circ S \circ L$

P.D.Q. $T \sim S \Rightarrow S \sim T$

Idea: asumir hipótesis, ver conclusión.

En efecto,

$T \sim S$

$\Rightarrow T: U \to U$, $S: U \to U$ transformaciones lineales t.q.

$\exists J, L$ isomorfismos t.q. $\boxed{T = J \circ S \circ L}$

Se quiere ver que $S \sim T \Rightarrow \exists \tilde{J}, \tilde{L}$ isomorfismos t.q. $S = \tilde{J} \circ T \circ \tilde{L}$

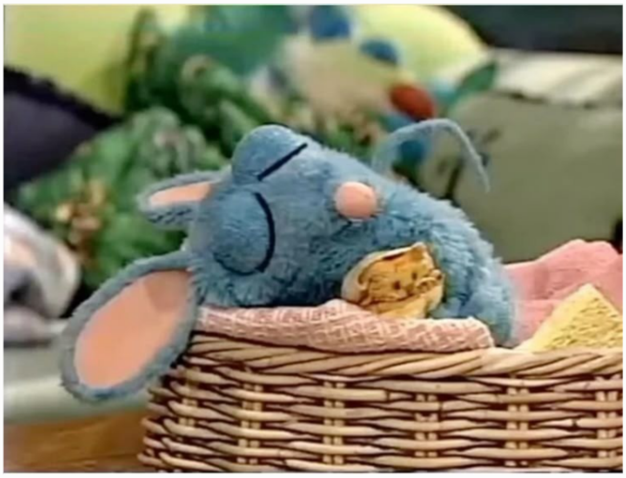
"Dan ganas" de despejar S de aquí:

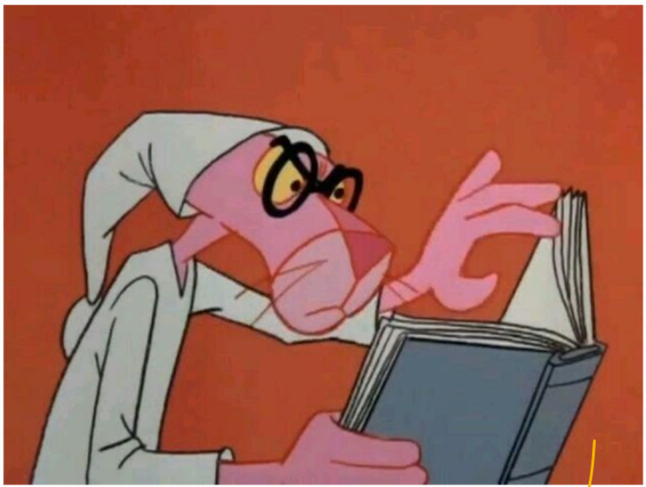
$T = J \circ S \circ L$

$\circ L^{-1}$ $\Rightarrow T \circ L^{-1} = J \circ S$

$J^{-1} \circ$ $\Rightarrow \underbrace{J^{-1}}_{=:\tilde{J}} \circ T \circ \underbrace{L^{-1}}_{=:\tilde{L}} = S$ biyectivos por la parte anterior. ∎

La dualidad del(@) estudiante:





así les veo en lineal jeje

Les leo/escucho por si les surgen dudas!

Ánimo con su estudio :)

aún no le puedo dar
un significado al título
de la canción con la
letra... y uds?

L@s leo