DESARROLLO AUX 7

SUMA DE ESPACIOS VECTORIALES

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

P_1

(P1) V es $\mathbb{R}$-e.v. ; $\dim(V) = n < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$

U es V-s.e.v. ; $\dim(U) = n-1$

(P1) a) P.D.Q. $(\forall v \notin U): \underbrace{\langle\{v\}\rangle \oplus U = V}$ « s.e.v. generado por v es suplemento de U en V »

$\Longleftrightarrow (\forall v \notin U)$: i) $\langle\{v\}\rangle + U = V$

ii) $\langle\{v\}\rangle \cap U = \{0\}$

La idea es ver que se cumple la caracterización !!

Otra forma es ver solo ii) y comprobar que la dimensión de $\oplus$ coincide con espacio total.

i) $\langle\{v\}\rangle + U = V$

Igualdad de conjuntos $\rightsquigarrow$ doble inclusión

$\subseteq$] Sea $z \in \langle\{v\}\rangle + U$

$\Rightarrow z = w + u$, algún $w \in \langle\{v\}\rangle$, $u \in U$

$\Rightarrow z = \beta v + u$, algún $\beta \in \mathbb{R}$, $u \in U$

Como $v \in V$ y $u \in U \subseteq V \Rightarrow z = \beta v + u \in V$.

$\therefore \langle\{v\}\rangle + U \subseteq V$ //

$\supseteq$] Propuesta !!

ii) $\langle\{v\}\rangle \cap U = \{0\}$

Sea $v \notin U$.

Supóngase que $\exists\, w \neq 0$ t.q. $w \in \langle\{v\}\rangle \cap U$

$$\Rightarrow w \in \langle\{v\}\rangle \wedge w \in U$$

$\Rightarrow w = \mu v$, algún $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\wedge$

$w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i$, para $\{u_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq U$ es base de U

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i = \mu v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i = v$$

$$\Rightarrow v \in U$$

pues $v \notin U$

Luego $U \oplus \langle\{v\}\rangle = \{0\}$

$$\left[\text{y } \dim(U \oplus \langle\{v\}\rangle) = \dim(U) + \dim(\langle\{v\}\rangle) = (n-1)+1 = n = \dim(V)\right]$$

$\blacksquare$

(P1) ii) S es V-sev ; $S \not\subseteq U$

P.D.Q. $S+U=V$

Calcular $\dim(S\cap U)$ ⇝ usar

Hay que ver que

$$(\forall v\in V)(\exists\, s\in S,\, u\in U):\ v = s+u \iff V=S+U$$

Como $S \not\subseteq U \Rightarrow S \subseteq V\setminus U$. O sea en S solo hay vectores $s\in S$ que no están en U. Por la parte anterior, $U \oplus \langle\{s\}\rangle = V$

Sea $\mathcal{B}_S = \{s, s_i\}_{i=1}^{k}$ base de S.

$$= \{s\} \cup \{s_i\}_{i=1}^{k}$$

Sigue que
$$S+U = \langle \{s, s_i\}_{i=1}^{k} \rangle + U$$
$$= \langle \{s_i\}_{i=1}^{k} \rangle \oplus \langle \{s\} \rangle + U$$
$$= \langle \{s_i\}_{i=1}^{k} \rangle \oplus V$$

Les dejo propuesto concluir jeje Pero piensen en que ya tienen relaciones para S, U, v! Solo faltan unos pasitos para concluir la dimensión.

(pueden escribirme si tienen dudas!)

P_2

(P2) $\mathcal{P}_3 \equiv$ polinomios de grado a lo más 3 con coef. en $\mathbb{R}$

(P2) a) $$U := \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; \sum_{i=0}^{3} a_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^{3} (-1)^i a_i = 0 \right\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

$$V := \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; a_0 = 2a_1 \wedge a_2 = 2a_3 \right\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

La idea es estudiarlos y encontrar bases para

ii) U, V

iii) $U \cap V$

iv) $U + V \xrightarrow{v)}$ ¿será suma directa? Oo.

Primero, se verá que U, V son s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (i)

$\Leftrightarrow \underbrace{U, V \subseteq \mathcal{P}_3}_{\Leftrightarrow \checkmark \text{ por enunciado}} \wedge\; U, V \neq \emptyset \;\wedge\; U, V$ cumplen prop. compacta

Para eso, es útil caracterizar más explícitamente los conjuntos:

$$U = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$V = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; a_0 = 2a_1 \wedge a_2 = 2a_3 \right\}$$

Notar que

* $u(x) \equiv 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \mathcal{P}_3 \wedge \begin{array}{l} 0+0+0+0=0 \\ 0-0+0-0=0 \end{array} \Rightarrow u(x) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$ //

* $v(x) = 2 + x + 6x^2 + 3x^3 \in \mathcal{P}_3 \wedge 2 = 2\cdot 1 \wedge 6 = 2\cdot 3 \Rightarrow v(x) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$ //

Ahora la propiedad compacta.

U] P.D.Q. $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall p,q \in U): p+\beta q \in U$

En efecto,

Sean $\beta \in \mathbb{R}$; $p,q \in U$

$$\Rightarrow p = p(x) = a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \wedge \underbrace{\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 + 2a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_2 = 0$$

y análogamente,

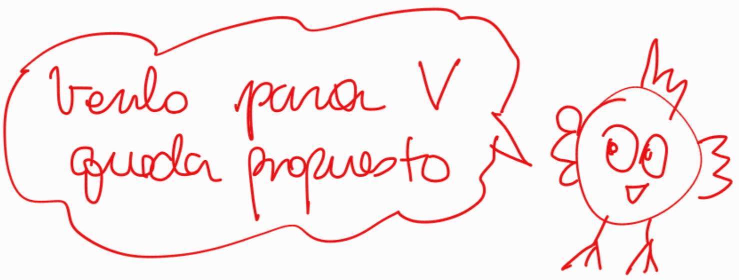
$$q = q(x) = b_0 x + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \wedge b_0 + b_2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta q = \beta q(x) = \beta b_0 x + \beta b_1 x + \beta b_2 x^2 + \beta b_3 x^3$$

$$\Rightarrow p + \beta q = (a_0 + \beta b_0) + (a_1 + \beta b_1)x + (a_2 + \beta b_2)x^2 + (a_3 + \beta b_3)x^3$$

y como $\left.\begin{array}{l} a_0 + a_2 = 0 \\ b_0 + b_2 = 0 \Rightarrow \beta b_0 + \beta b_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 + \beta b_0 = 0 \\ a_2 + \beta b_2 = 0 \end{array}$

$\therefore p + \beta q \in U$ //



Por lo anterior, U, V son $\mathcal{P}_3$-s.e.v. ▨

Ahora las bases

ii) U, V

La idea es proponer vectores que sean l.i. y que generen así como que estén en los respectivos conjuntos.

Según esta intuición, se propone:

$\mathcal{B}_U = \{1-x^2, x-x^3\}$ es base de U

$\mathcal{B}_V = \{2+x, 2x^2+x^3\}$ es base de V verifíquenlo !!

Como $|\mathcal{B}_U| = 2$ y $\mathcal{B}_U$ base de $U \Rightarrow \dim(U) = 2$,

$|\mathcal{B}_V| = 2$ y $\mathcal{B}_V$ base de $V \Rightarrow \dim(V) = 2$. ☒

iii) $U \cap V$ "cumplir todas las condiciones"

La idea será entender el conjunto !!

$$U\cap V = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} a_0+a_1+a_2+a_3=0, \\ a_0-a_1+a_2-a_3=0 \end{matrix}}_{\Leftrightarrow a_0+a_2=0 \Leftrightarrow a_2=-a_0} \; \begin{matrix} a_0 = 2a_1, \\ a_2 = 2a_3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ p(x) = a_0 + \tfrac{1}{2}a_0 x - a_0 x^2 - \tfrac{1}{2}a_0 x^3 \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a_0\left(1+\tfrac{1}{2}x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right) \in \mathcal{P}_3 \;\middle|\; a_0 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{1+\tfrac{1}{2}x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right\} \right\rangle$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{U\cap V} = \{1+\tfrac{1}{2}x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\}$ es base de $U\cap V$ pues genera y es l.i.,

en consecuencia $\dim(U+V) = 1$ pues $|\mathcal{B}_{U\cap V}| = 2$. ☒

iv) $U+V$

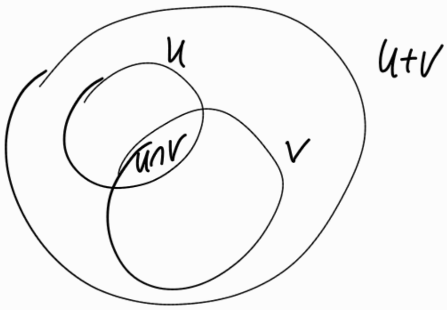
Notar que por def. $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V)$

$\iff \dim(U+V) = 2+2-1$

$\iff \dim(U+V) = 3 \neq 4 = \dim(U) + \dim(V)$

v)

entonces no es suma directa



Notar que $U\cap V \subseteq U+V$, así que la base de $U\cap V$ se puede extender en $U+V$ agregando elementos l.i. Como $\dim(U\cap V) = 1$ y $\dim(U+V) = 3$, solo hay que agregar dos elementos. ¿cuáles? uno de cada una de las bases de U y V, por ejemplo:

$1-x^2 \in B_U$

$2+x \in B_V$

$\Rightarrow \tilde{B}_{U\cap V} = \{1+\frac{1}{2}x - x^2 - \frac{1}{2}x^3, 1-x^2, 2+x\}$

es base de $U+W$ $\boxtimes$

P2) b) S en P_3 - s.e.v.

$\mathcal{B} = \{x^2+x+1,\ x^3+x,\ x^3+1\}$ base de S

Encontrar W en P_3 s.e.v.

Dar base de W t.q. $S \oplus W = P_3$

Por la (P1) i) basta tomar W como el espacio generado por un vector que no esté en S.

↳ esto se puede elegir viendo polinomios que no se puedan generar con la base.

Ej: $1,\ x^2,\ 1+x^3,\ x^3,\ 1+x+x^2+x^3$, etc.

Se tomará $W = \langle\{x^3\}\rangle$. ▧

P3

PROPUESTA

Ya estudiamos ese s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en un auxiliar previo; con lo que aprendieron en el resto de preguntas hoy debiesen ser capaces de demostrarlo. Si no, pregunten!

P4

P4 $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \leftarrow$ espacio vectorial

$A(V) := \{Ax \mid x \in V\}$, $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, V es $\mathbb{R}^n$ − s.e.v.

P4 a) P.D.Q. $A(V)$ $\underbrace{\text{bien definido}}_{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}),\, V \in \mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ $A(V)$ es $\mathbb{R}^n$ − s.e.v.

Idea: ver que supuestos bastan para que sea s.e.v.

Se sabe que $A(V)$ está bien definido

$\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es $\mathbb{R}^n$ − s.e.v.

P.D.Q. $A(V)$ es $\mathbb{R}^n$ − s.e.v.

$\Leftrightarrow A(V) \neq \emptyset \ \wedge\ A(V) \subseteq \mathbb{R}^n \ \wedge$ prop. compacta

i) $A(V) \neq \emptyset$

En efecto, como V es $\mathbb{R}^n$-s.e.v. $\Rightarrow \exists v \in V$.

Luego, basta tomarlo y $Av \in A(V)$ pues $v \in V$.

$\therefore A(V) \neq \emptyset$.

ii) $A(V) \subseteq \mathbb{R}^n$

Es directo por def.

En efecto, sea $y \in A(V) \Rightarrow y = Ax \subseteq \mathbb{R}^n \therefore A(V) \subseteq \mathbb{R}^n$.

iii) $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall p, q \in A(V))$

En efecto,

Como $p, q \in A(V) \Rightarrow p = Av$, $q = Aw$, algún $v, w \in V$.

$\Rightarrow \beta q = \beta A w = A(\underbrace{\beta w}_{\in V \text{ pues } V \text{ es s.e.v.}})$

$\Rightarrow p + \beta q = A(v + \beta w)$, $z : v + \beta w \in V$

$\therefore p + \beta q \in A(V)$ $\blacksquare$

(P4) b) U, W son $\mathbb{R}^n$-s.e.v. ; $U \oplus W = \mathbb{R}^n$

P.D.Q. $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ inv. $\Longleftrightarrow$ $A(U) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$

Por doble implicancia

$\Rightarrow$) $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible.

P.D.Q. $A(U) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow A(U) + A(W) = \mathbb{R}^n \wedge A(U) \cap A(W) = \{0\}$

En efecto,

i) $A(U) + A(W) = \mathbb{R}^n$

$\subseteq$) Sea $z \in A(U) + A(W)$

$\Rightarrow z = \tilde{u} + \tilde{w}$, para $(\tilde{u}, \tilde{w}) \subseteq A(U) \times A(W) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow z \in \mathbb{R}^n$

$\therefore A(U) + A(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ //

$\supseteq$) Sea $z \in \mathbb{R}^n$,

Como A es invertible $\Rightarrow Ax = z$ tiene sol $x \in \mathbb{R}^n = U \oplus W$

Luego $x = u + w$, algún $u, w \in U, V$

Sigue que $z = Ax = A(u+w) = \underbrace{Au}_{\in A(U)} + \overbrace{Aw}^{\in A(V)} \in A(V) + A(W)$

$\therefore \mathbb{R}^n \subseteq A(U) + A(W)$ //

ii) $A(U) \cap A(W) = \{0\}$

Sea $z \in A(U) \cap A(W)$

$\iff z \in A(U) \wedge z \in A(W)$

$\iff z = Au$, algún $u \in U$ $\wedge$ $z = Aw$, algún $w \in W$

$\iff Au = Aw$, algún $u \in U$, $w \in W$

$\iff A(u-w) = 0$, algún $u \in U$, $w \in W$

no puede ocurrir porque es invertible

$\iff A = 0 \vee u - w = 0$

$\iff u - w = 0$, algún $v \in V$, $w \in W$

$\iff u = w$, algún $(v,w) \in V \times W$

$\iff u \in \underbrace{U \cap W}_{=\{0\}} \iff u = \{0\}$

$\therefore A(U) \cap A(W) = \{0\}$ //

$\Leftarrow$] $A(U) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow A(U) + A(W) = \mathbb{R}^n \wedge A(U) \cap A(W) = \{0\}$

P.D.Q. $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible

Se verá que $(\forall z \in \mathbb{R}^n) : Ax = z$ tiene sol.

En efecto,

Sea $z \in \mathbb{R}^n$, Por hipótesis $\mathbb{R}^n = A(U) + A(W)$

$\Rightarrow z = \tilde{u} + \tilde{w}, \ \tilde{u} \in A(U), \ \tilde{w} \in A(W)$

$\Rightarrow z = Au + Aw$, algún $u \in U, w \in W$

$\Rightarrow z = A(u + w)$

$\Rightarrow A$ es invertible$_{//}$

Este es el cierre de un gran capítulo!
(Del apunte, del curso, del semestre – pues comienza la segunda parte, literal).

Éxito en sus evaluaciones; descansen en lo posible :)
Y recuerden que me pueden escribir por si tienen dudas!

Para estos días medios
veraniegos, medios invernales...