DESARROLLO AUX 10

MÁS MATRIZ REPRESENTANTE: CAMBIO DE BASE, COMPOSICIÓN, e.t.c. ...

MA1102-5
2024-2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

La notación que yo uso para matriz representante es $[\text{función}]\,(\text{base de partida})\,(\text{base de llegada})$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz representante} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{tantas columnas} \\ \text{como vectores en} \\ \text{base de partida}}} \Bigg\}\ \substack{\text{tantas filas} \\ \text{como vectores en} \\ \text{base de llegada}}$$

Pueden usar la notación al revés. Lo que más les acomode! Lo que importa es que sean consistentes. :)

P_1

P7

V, W $\mathbb{R}$-e.v

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ V-base

$\mathcal{A} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq W$ W-base

$R: V \to W$ transformación lineal

$$[R]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar $R(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en términos de $\{w_i\}_{i=1}^4$

Idea: Esencialmente se pide encontrar

$$[R(3v_1 + 2v_2 - v_3)]_{\mathcal{A}}$$

Siempre lo importante es recordar que la matriz representante guarda la escritura de la imagen de una base c/r a otra.

↳ Se quiere expresar $R(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en términos de la base

En efecto,

Como R es lineal:

$$R(3v_1 + 2v_2 - v_3)$$
$$= 3R(v_1) + 2R(v_2) - R(v_3)$$

Como se conoce la matriz representante, cuyas columnas son las coordenadas en la base de llegada:

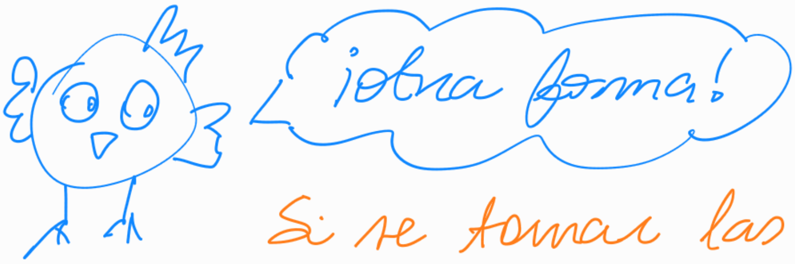
$$[R(v_1)]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [R(v_2)]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [R(v_3)]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Luego:

$$[R(3v_1+2v_2-v_3)]_A = 3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\-3\\6\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\2\\2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\5\end{pmatrix},$$ que

justamente es la representación de $R(3v_1+2v_2-v_3)$ en términos de $\{w_i\}_{i=1}^{4}$ ■



Si se toman las coordenadas en la partida del valor cuyas coordenadas en la llegada se quieren conocer, basta estudiar el producto matricial:

Se quiere $R(3v_1+2v_2-v_3) \rightarrow [3v_1+2v_2-v_3]_B = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

Luego $$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 1 & -1\\2 & 1 & 4\\3 & -2 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \overset{}{\underset{\text{def}}{=}} [R(3v_1+2v_2-v_3)]$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\5\end{pmatrix}$$ ■

(P1) b) c) Propuestas!

P_2

P2

$$\begin{cases} M: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ \qquad p(x) \mapsto M(p(x)) = x\,p(x) \end{cases}$$ transformación lineal

$$[T]_{\beta_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ c/r a bases canónicas

$\beta_{\mathcal{P}_2} := \{1, x, x^2\}$

$\beta_{\mathcal{P}_3} := \{1, x, x^2, x^3\}$

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2} := \{1, x-1, (x-1)^2\} \leq \mathcal{P}_2 & \text{partida} \\ \tilde{\beta}_{\mathcal{P}_3} := \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\} \leq \mathcal{P}_3 & \text{llegada} \end{array}\right\} \text{nuevas bases}$$

Calcular matriz representante c/r a nuevas bases

Idea: Usar cambio de base!
Apaña mucho hacer un "mapa" con lo que se conoce, y en el fondo reescribir la info.

Observar el diagrama de cambio de base:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2} \subseteq \mathcal{P}_2 \arrow[r, "M"] \arrow[d, "I_{\mathcal{P}_2}"'] & \mathcal{P}_3 \supseteq \tilde{\beta}_{\mathcal{P}_3} \\
\beta_{\mathcal{P}_2} \subseteq \mathcal{P}_2 \arrow[r, "M"] & \mathcal{P}_3 \supseteq \beta_{\mathcal{P}_3} \arrow[u, "I_{\mathcal{P}_3}"']
\end{tikzcd}$$

← a lo que se quiere llegar

← ¡Magia!

← lo que se tiene

Luego $M = I_{\mathcal{P}_3} \circ M \circ I_{\mathcal{P}_2}$

ya se conoce!

$$\Rightarrow [M]_{\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2}\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_3}} = [I_{\mathcal{P}_3}]_{\beta_{\mathcal{P}_3}\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_3}} [M]_{\beta_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_3}} [I_{\mathcal{P}_2}]_{\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_2}}$$

Hay que calcular $[I_{P_3}]_{\beta_{P_3}\tilde{\beta}_{P_3}}$, $[I_{P_2}]_{\tilde{\beta}_{P_2}\beta_{P_2}}$:

$* \ [I_{P_3}]_{\beta_{P_3}\tilde{\beta}_{P_3}}$ $\left\{ \begin{array}{l} I: P_3 \to P_3 \\ \quad x \mapsto I(x) = x \end{array} \right.$ $\Bigg\|$ $\begin{array}{l} \beta_{P_3} := \{1, x, x^2, x^3\} \\ \tilde{\beta}_{P_3} := \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\} \end{array}$

Hay que reescribir la imagen por I de cada vector de la base de la partida en términos de vectores de la base de llegada

$* \ I_{P_3}(1) = 1$

$$= 1 \cdot 1 + 0(-x) + 0(x^2) + 0(x^2 - x^3)$$

$$\Rightarrow [1]_{\tilde{\beta}_{P_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

$* \ I_{P_3}(x) = x$

$$= 0 \cdot 1 + (-1)(-x) + 0(x^2) + 0(x^2 - x^3)$$

$$\Rightarrow [x]_{\tilde{\beta}_{P_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

$* \ I_{P_3}(x^2) = x^2$

$$= 0 \cdot 1 + 0(-x) + 1(x^2) + 0(x^2 - x^3)$$

$$\Rightarrow [x^2]_{\tilde{\beta}_{P_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

$* \ I_{P_3}(x^3) = x^3$

$$= 0 \cdot 1 + 0(-x) + 1(x^2) + (-1)(x^2 - x^3)$$

$$\Rightarrow [x^3]_{\tilde{\beta}_{P_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} //$$

$$\therefore [I_{P_3}]_{\beta_{P_3}\tilde{\beta}_{P_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} //$$

$* \ \underline{[I_{\mathcal{P}_2}]_{\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_2}}}$ $\left\{\begin{array}{l} I: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2 \\ x \mapsto I(x) = x \end{array}\right.$ $\Big\|$ $\begin{array}{l} \beta_{\mathcal{P}_2} := \{1, x, x^2\} \\ \tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2} := \{1, x-1, (x-1)^2\} \end{array}$

La construcción es la misma de antes!

$* \ I_{\mathcal{P}_2}(1) = 1$

$= 1\cdot(1) + 0(x) + 0(x^2)$

$\Rightarrow [1]_{\beta_{\mathcal{P}_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$* \ I_{\mathcal{P}_2}(x-1) = x-1$

$= (-1)(1) + 1(x) + 0(x^2)$

$\Rightarrow [x-1]_{\beta_{\mathcal{P}_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$* \ I_{\mathcal{P}_2}((x-1)^2) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$= 1(1) + (-2)x + 1 x^2$

$\Rightarrow [(x-1)^2]_{\beta_{\mathcal{P}_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \ [I_{\mathcal{P}_2}]_{\tilde{\beta}_{\mathcal{P}_2}\beta_{\mathcal{P}_2}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En virtud de lo anterior:

$$[M]_{\tilde{\beta}_{p_2}\tilde{\beta}_{p_3}} = [I_{p_3}]_{\beta_{p_3}\tilde{\beta}_{p_3}} [M]_{\beta_{p_2}\beta_{p_3}} [I_{p_2}]_{\tilde{\beta}_{p_2}\beta_{p_2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ calculando lo pedido

P_3

(P3)

$$\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+3y+3z \\ x+3y+6z \end{pmatrix} \end{cases}$$

(P3) a) $\beta_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\beta_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular matriz representante c/r a $\underset{\text{partida}}{\beta_1}$ $\underset{\text{llegada}}{\beta_2}$

Como ya se ha visto, hay que calcular la imagen de cada vector de la base de partida por medio de la transformación en términos de la base de llegada.

* $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* $T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* $T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [T]_{\beta_1 \beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \blacksquare$$

(P3) b) ¿ T es invertible?

Idea: Usar caracterización de invertibilidad de una transformación lineal con invertibilidad de su matriz representante

⚠ no basta justificar con que $\dim(\mathrm{Dom}(T)) = \dim(\mathrm{Cod}(T))$, pues esto solo asegura que en caso de que sea inyectiva (o epiyectiva o biyectiva) equivale a ser el resto, así que habría que chequear alguna para ver el valor de verdad.

→ ver que $\ker(T) = \{0\}$ caracteriza la inyectividad, eso podría ser un buen camino.

Notar que $[T]_{\beta_1 \beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ → diagonal → sin ceros en la diagonal } invertible ∎

P3 c) $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = [N \circ T]_{\beta_1 \beta_2}$$

Determinar $[N]_{\beta_2 \beta_2}$.

Idea: Usar la regla para matriz representante de la composición.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \qquad [g \circ f]_{\beta_U \beta_W} = [g]_{\beta_V \beta_W} [f]_{\beta_U \beta_V}$$

Aplicando la idea a este caso:

$$\begin{tikzcd} \underset{\beta_2}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "N"] \arrow[rr, bend right, "N \circ T"'] & \underset{\beta_2 \ \beta_1}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "T"] & \underset{\beta_2}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd} \qquad \underbrace{[N \circ T]_{\beta_1 \beta_2}}_{\text{conocida (es } D)} = [N]_{\beta_2 \beta_2} [T]_{\beta_1 \beta_2}$$

$$\Rightarrow [N]_{\beta_2 \beta_2} = [N \circ T]_{\beta_1 \beta_2} \underbrace{[T]^{-1}_{\beta_1 \beta_2}}_{\substack{\text{se puede calcular!} \\ \text{(inversa de Diag. es Diag.} \\ \text{con entradas inversas).}}}$$

T invertible $\Leftrightarrow$ $[T]$.. invertible

$$\therefore [N]_{\beta_2 \beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow [N]_{\beta_2 \beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \blacksquare$$

P4

P4

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Pueden ser matriz representante de la misma tranformación lineal?

Idea: Si lo fuesen, caracterizarían lo mismo en cuanto a inyectividad, epiyectividad, invertibilidad y otras características.

Notar que J es invertible pues está escalonada y no tiene ceros en la diagonal (Teorema que se aprendió en la parte de sist. lineales)

Por otro lado, S no es invertible! Argumentos:

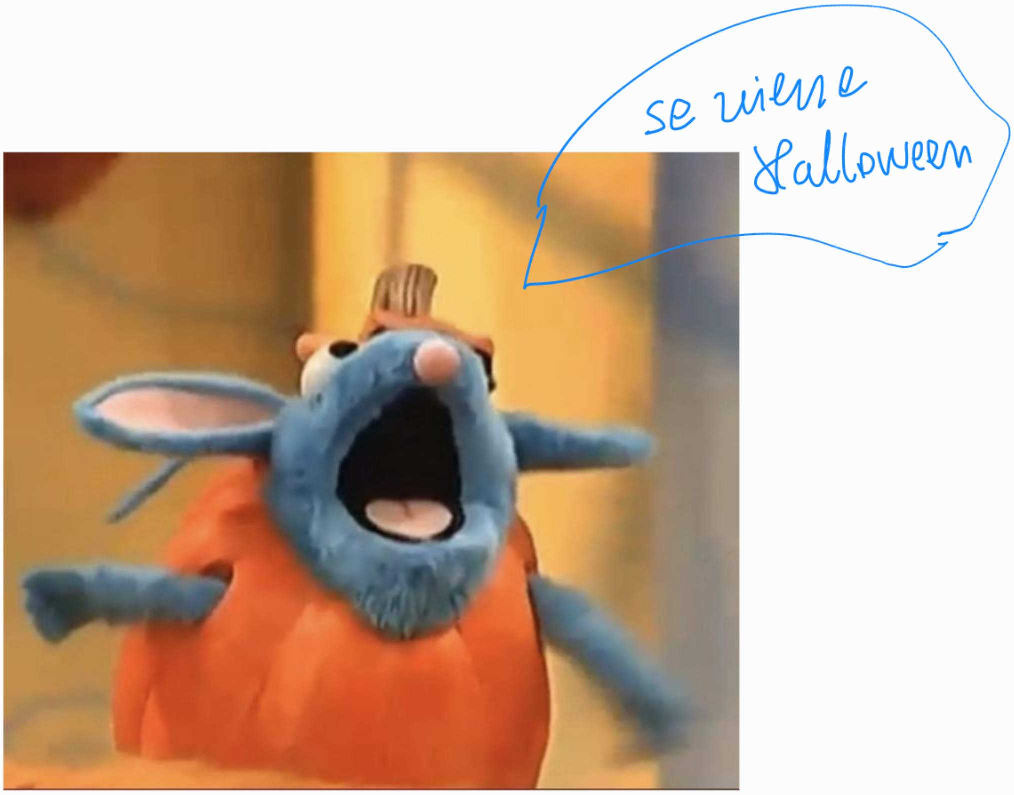
* tiene una fila de ceros

* al escalonar, tiene cero en la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Luego J y S no pueden representar a la misma transformación lineal. ∎

OJO: No es suficiente descartar que sean de distintas transf. lineales porque las matrices lucen distinto (pues estas dependen de las bases de cada espacio!)



Con esto culmina la unidad de transformaciones lineales, muy entrete!

Mucho éxito y ánimo en su estudio, quedo atenta a si surgen dudas :)

escuché está
canción mientras
hacía la pauta