Resumen C2

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya

En el presente documento se tienen los principales resultados que deben manejar para el segundo control del curso (consideren que los contenidos son acumulativos, por lo que deben conocer la materia del primer control). Recuerden que no solo importa conocer las definiciones, propiedades y teoremas, sino que también es necesario comprenderlas en profundidad y saber cómo aplicarlas. Confíen en sus conocimientos y éxito en su estudio (:

Les dejo la siguiente imagen (obtenida de `aquí`). Corresponde a lo que se conoce como Campo Ultra Profundo de Hubble, una imagen creada con exposiciones de aproximadamente once días durante los años 2003 y 2004 por el telescopio espacial Hubble. En esta fotografía los puntos brillantes corresponden a galaxias, todas aquellas cuya luz fue capturada por Hubble; se estima que hay aproximadamente 10000 en este núcleo... ¡sí, solo en esa parte del Universo! Aquí se pueden observar galaxias en distintas etapas de su vida, y a distintos años luz de distancia (las rojas son las más lejanas -efecto Doppler-); todas son muy diversas en cuanto a su color (esto tiene que ver con su composición), tamaño, forma (espiral, por ejemplo). Y dentro de cada una hay miles de estrellas que forman sistemas planetarios, tal como se vería nuestro Sistema Solar desde alguna de ellas. 20 años, el tiempo desde esta imagen, es despreciable en la edad del Universo; ¡es bonito pensar que es muy probable que siga luciendo de esta manera!

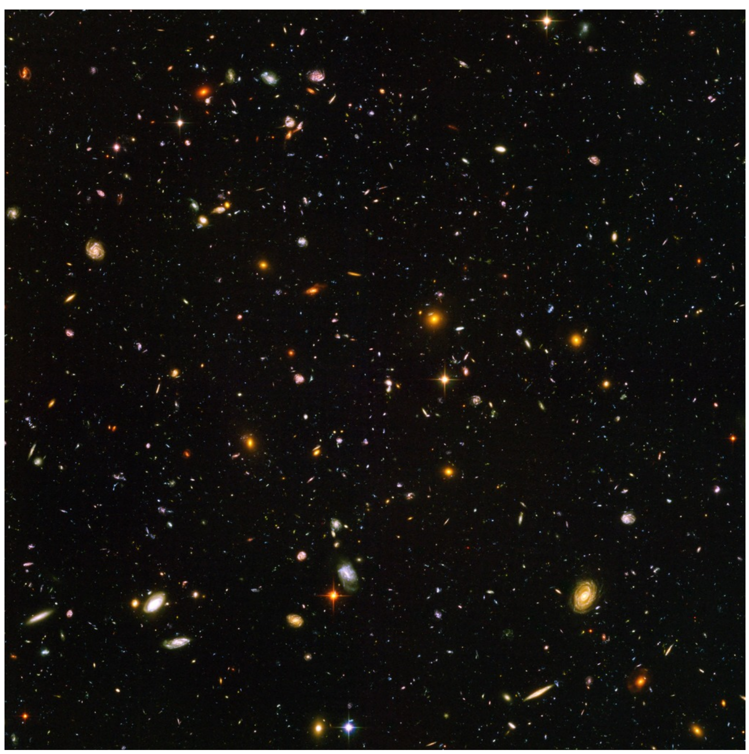

Figura 1: Hubble Ultra Deep Field (NASA, ESA, S. Beckwith (STScI) and the HUDF Team) 2004

Mi propósito con incluir esto es que tengan presente y puedan dimensionar un poco las escalas en las que se mueve el Universo en comparación a nuestra vida cotidiana. Muchas veces cada quien se enfrenta a cosas que podrían abrumarle, problemas u otras situaciones; circunstancialmente parecen muy importantes, pero cuando recordamos nuestro lugar en el mundo, todo el tiempo que ha existido el Universo, su vastedad en todos los sentidos, podría ser reconfortante recordar que, a gran escala, las cosas se ven tan hermosas como en esa imagen. ¡Ánimo con todo!

Transformaciones lineales

- **[Transformación lineal]:** Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. La función $T\colon U \to V$ es una transformación lineal si y solo si satisface que:

  i) $(\forall u_1, u_2 \in U) : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

  ii) $(\forall u \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : T(\beta u) = \beta T(u)$

  Donde la primera propiedad establece un homomorfismo entre los grupos asociados a cada espacio vectorial. Otra caracterización es $(\forall u_1, u_2 \in U)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) : T(\alpha u_1 + \beta u_2) = T(\alpha u_1) + \beta T(u_2)$. También se satisface que $T(0) = 0$ e imparidad. Un **isomorfismo** es una aplicación lineal biyectiva.

- **[Acciones entre aplicaciones lineales]:** La composición entre aplicaciones lineales es lineal; más aún si son biyectivas, la composición también lo será. La inversa de una aplicación lineal es lineal.

- **[Núcleo o kernel]:** Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su núcleo corresponde al conjunto definido por $\mathrm{Ker}(T) := \{x \in U \mid T(x) = 0\}$. Es un subespacio vectorial del dominio de la transformación lineal y su dimensión se denomina **nulidad**.

- **[Imagen]**: Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su imagen corresponde al conjunto definido por $\mathrm{Im}(T) := \{y \in V \mid (\exists x \in U) : T(x) = y\}$. Es un subespacio vectorial del codominio y su dimensión se llama **rango**.

- **[Teorema Núcleo-Imagen]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con U de dimensión finita, y la transformación lineal $T\colon U \to V$. Entonces se cumple que $\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$.

- **[Consecuencias de igualdad entre dimensiones]**: Para transformaciones lineales definidas en espacios de igual dimensión, es equivalente ser inyectiva, epiyectiva y biyectiva (isomorfismo).

- **[Consecuencias de desigualdad entre dimensiones]**: Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la dimensión de la partida es mayor que la llegada, no pueden ser inyectivas. Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la llegada es mayor que la partida, no pueden ser epiyectivas.

- **[Herencia en transformaciones lineales]**: Sean V, V' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con U, W subespacios vectoriales de V, y la transformación lineal $f\colon V \to V'$. Entonces:

  ***)** $f(U)$ es subespacio vectorial de V'.

  ***)** $f(U + W) = f(U) + f(W)$

  ***)** $f(U \oplus W) = f(U) \oplus f(W)$ si f inyectiva.

  ***)** $U \cap W = \{0\} \iff f(U) \cap f(W) = \{0\}$ si f inyectiva.

  ***)** La imagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la partida es finito y linealmente independiente en la llegada siempre que f sea inyectiva.

  ***)** La preimagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la llegada es finito y linealmente independiente en la partida.

  ***)** $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff f$ es inyectiva

- **[Suma de subespacios vectoriales]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces la suma de dichos subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial de V, y se define por: $U + W := \{v \in V \mid v = u + w, u \in U \wedge w \in W\}$.

- **[Suma directa]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $Z = U + W$ es suma directa si y solo si todo vector de $z \in Z$ se escribe de manera única como $z = u + w$ para algún $u \in U, w \in W$. En tal caso se anota $Z = U \oplus W$ y se caracteriza por satisfacer $U + W = Z$ y $U \cap W = \{0\}$. Si $Z = V$ entonces U y W se llaman **suplementarios**.

- **[Dimensión de sumas]:** Sean U, W subespacios vectoriales de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces:

  - $V = U + W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
  - $V = U \oplus W \implies \dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$

Matriz representante de transformaciones lineales

- **[Matriz representante]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con β_U, β_V bases de cada espacio, respectivamente, y la transformación lineal $f\colon U \to V$. La matriz representante de f entre las bases β_U, β_V se denotará $[f]_{\beta_U\beta_V}$ ($[\text{función}]_{(\text{base de partida})(\text{base de llegada})}$), tiene tantas columnas como vectores en la base de la partida y tantas filas como vectores en la base de la llegada, y sus entradas por columnas están dadas por los ponderadores de los vectores de la base de la llegada tal que reescriben la imagen por f de cada vector de la base de la partida.
  - f es invertible si y solo si $[f]_{\beta U\beta_V}$ es matriz invertible, y entonces $[f^{-1}]_{\beta_U\beta_V} = [f]^{-1}_{\beta U\beta_V}$
  - Si $g\colon U \to V$ es transformación lineal y $\gamma \in \mathbb{K}$:
    - $[f+g]_{\beta_U\beta_V} = [f]_{\beta_U\beta_V} + [g]_{\beta_U\beta_V}$
    - $[\gamma f]_{\beta_U\beta_V} = \gamma[f]_{\beta_U\beta_V}$
  - Si $h\colon W \to U$ es transformación lineal y β_W es base de W, entonces la composición $f \circ h\colon U \to V$ es tal que: $[f\circ h]_{\beta_W\beta_V} = [f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [h]_{\beta_W\beta_U}$
- **[Imagen de vector como producto matricial]**: El producto matricial entre la matriz representantes con las coordenadas de un vector en la base de partida corresponde a las coordenadas en la base de llegada de la imagen del vector, por la transformación lineal.

$$[f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [v]_{\beta_U} = [f(v)]_{\beta_V}$$

- **[Cambio de base]**: Sea $f\colon U \to V$ transformación lineal. Sean $\beta_U, \hat\beta_U$ bases de U, $\beta_V, \hat\beta_V$ bases de V. Bajo la idea de que $\hat\beta$ son las nuevas bases con respecto a las cuales se quiere expresar la matriz representante, se tiene el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \hat\beta_U \subseteq U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \supseteq \hat\beta_V \\ \downarrow\uparrow I_U & & \downarrow\uparrow I_V \\ \beta_U \subseteq U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \supseteq \beta_V \end{array}$$

De lo anterior, se deduce que $f = I_V \circ f \circ I_U$ y por lo tanto se cumple que:

$$[f]_{\beta_U\beta_V} = [I_V]_{\hat\beta_V\beta_V} \cdot [f]_{\beta_U\beta_V} \cdot [I_U]_{\hat\beta U\beta_U}$$