Auxiliar 9

Inyectividad, epiyectividad y matriz representante de transformaciones lineales

Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliar: Bianca Zamora Araya
Fecha: 16 de octubre de 2024

P1. [Inyectividad, sobreyectividad, biyectiva]
Se define $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $p(x) \mapsto T(p(x)) = (x^2+x+1)p(x)$. **a)** Demuestre que T es una transformación lineal. **b)** Determine el núcleo y la imagen de T, de bases para cada espacio e indique sus dimensiones. **c)** Estudie posible inyectividad y epiyectividad de T. Mencione si T es isomorfismo.

P2. [Primer acercamiento]
Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ una base de V. Considerando $J\colon V \to V$ transformación lineal que satisface que $J(u) = v - w$, $J(v) = u + v$ y $J(w) = u + 2v - w$, determine la matriz representante de J.

P3. [Transformaciones lineales con polinomios]

a) Sea $M\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ la aplicación lineal que a cada $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ le asocia $M(p(x)) = xp(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Calcule la matriz representante de M con respecto a las bases canónicas correspondientes a cada espacio.

b) Sea la transformación lineal $R\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $R(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) = \delta + \gamma x + \beta x^2 + \alpha x^3$. Calcule la matriz representante de R con respecto a la base $\mathcal{C} := \{1, x, x^2, x^3\}$.

P4. [Transformaciones lineales vectoriales]

a) Sea la transformación lineal $D\colon \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que su regla de asignación es $D(A) = MA + AM$ para cada $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine la matriz representante de D con respecto a la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que satisface

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

i) Encuentre una base del núcleo de f e indique su dimensión, así como su rango. **ii)** Determine explícitamente la regla de asociación $f(x) \forall x \in \mathbb{R}^3$. **iii)** Calcule la matriz representante de f con respecto a las bases:

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Principales definiciones y propiedades

- **[Transformación lineal]:** Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. La función $T\colon U \to V$ es una transformación lineal si y solo si satisface que:

  i) $(\forall u_1, u_2 \in U) : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

  ii) $(\forall u \in U)\,(\forall \beta \in \mathbb{K}) : T(\beta u) = \beta T(u)$

  Donde la primera propiedad establece un homomorfismo entre los grupos asociados a cada espacio vectorial. Otra caracterización es $(\forall u_1, u_2 \in U)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) : T(\alpha u_1 + \beta u_2) = T(\alpha u_1) + \beta T(u_2)$. También se satisface que $T(0) = 0$ e imparidad.

- **[Isomorfismo]:** Corresponde a una aplicación lineal que es biyectiva.

- **[Acciones entre aplicaciones lineales]:** La composición entre aplicaciones lineales es lineal; más aún si son biyectivas, la composición también lo será. La inversa de una aplicación lineal es lineal.

- **[Núcleo o kernel]:** Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su núcleo corresponde al conjunto definido por $\text{Ker}(T) := \{x \in U \mid T(x) = 0\}$. Es un subespacio vectorial del dominio de la transformación lineal y su dimensión se denomina **nulidad**.

- **[Imagen]**: Sea la transformación lineal $T\colon U \to V$. Su imagen corresponde al conjunto definido por $\text{Im}(T) := \{y \in V \mid (\exists x \in U) : T(x) = y\}$. Es un subespacio vectorial del codominio y su dimensión se llama **rango**.

- **[Teorema Núcleo-Imagen]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con U de dimensión finita, y la transformación lineal $T\colon U \to V$. Entonces se cumple que $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$.

- **[Consecuencias de igualdad entre dimensiones]**: Para transformaciones lineales definidas en espacios de igual dimensión, es equivalente ser inyectiva, epiyectiva y biyectiva (isomorfismo).

- **[Consecuencias de desigualdad entre dimensiones]**: Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la dimensión de la partida es mayor que la llegada, no pueden ser inyectivas. Las transformaciones lineales definidas en espacios tal que la llegada es mayor que la partida, no pueden ser epiyectivas.

- **[Herencia en transformaciones lineales]**: Sean V, V' dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con U, W subespacios vectoriales de V, y la transformación lineal $f\colon V \to V'$. Entonces:

  ***)** $f(U)$ es subespacio vectorial de V'.

  ***)** $f(U + W) = f(U) + f(W)$

  ***)** $f(U \oplus W) = f(U) \oplus f(W)$ si f inyectiva.

  ***)** $U \cap W = \{0\} \iff f(U) \cap f(W) = \{0\}$ si f inyectiva.

  ***)** La imagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la partida es finito y linealmente independiente en la llegada siempre que f sea inyectiva.

  ***)** La preimagen por f de un conjunto finito y linealmente independiente en la llegada es finito y linealmente independiente en la partida.

  ***)** $\text{Ker}(f) = \{0\} \iff f$ es inyectiva

- **[Matriz representante]**: Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, con β_U, β_V bases de cada espacio, respectivamente, y la transformación lineal $f\colon U \to V$. La matriz representante de f entre las bases β_U, β_V se denota $[f]_{\beta_U \beta_V}$, tiene tantas columnas como vectores en la base de la partida y tantas filas como vectores en la base de la llegada, y sus entradas por columnas están dadas por los ponderadores de los vectores de la base de la llegada tal que reescriben la imagen por f de cada vector de la base de la partida.